# Matemáticas II 2º BC ** REC Mat-Det-Sist ** Dic-24

**1º)**

**a) Dada la matriz** $M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$**, encuentra todas las matrices que conmutan con** $M$.

**b) Resuelve el sistema** $A\cdot X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ **, siendo** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & -1\end{pmatrix}$ **y** $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$**, utilizando exclusivamente el rango de la matriz** $A$**.**

**Resolución**

$$M\cdot X=X\cdot M\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a & b\\ 4a+2c & 4b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+4b & 2b\\ c+4d & 2d\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a=a+4b\\ b=2b\\ 4a+2c=c+4d\\ 4b+2d=2d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=a\\ b=0\\ c=4d-4a\\ d=d\end{cases}$$

Las matrices buscadas son de la forma $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 4(d-a) & d\end{pmatrix}\quad\forall\, a,d\in\mathbb{R}$

b) Se trata de un sistema homogéneo.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & -3 & -6\\ 7 & -6 & -22\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & -6\\ -6 & -22\end{vmatrix}=66-36=30\neq 0.$$

Por tanto $rg(A)=3=nº\ incógnitas\ \ SCD.\quad Sol: x=y=z=0$

**2º) Justifica si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:**

**a) Si** $A\in\mathcal{M}_{mxn}$ **, siempre es posible efectuar el producto** $A.A^t$.

**b) Si** $A\in\mathcal{M}_3$ **simétrica con** $|A|=5$ **, entonces** $|A+A^t|=15$

**c) El producto de dos matrices simétricas de la misma dimensión es también una matriz simétrica.**

**Resolución**

a) Si $A\in\mathcal{M}_{mxn}$, entonces $A^t\in\mathcal{M}_{nxm}$ y, por tanto, $A\cdot A^t\in\mathcal{M}_m$. La afirmación es verdadera.

b) Como la matriz es simétrica, se tiene que $A=A^t$.

$$|A+A^t|=|2A|=2^3\cdot|A|=40\neq 15$$

Por tanto, la afirmación es falsa.

c) Sean $A,B\in\mathcal{M}_n$ simétricas. Se tiene que $A=A^t\ y\ B=B^t$.

$$(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t=B\cdot A\overset{No\ conmutativo}{\neq}A\cdot B$$

En general $A\cdot B\neq(A\cdot B)^t$ y, por tanto, la afirmación es falsa.

**3º)**

Una persona decide invertir una cantidad de 12000 € en bolsa, comprando acciones de tres empresas distintas A, B y C. Invierte en A el doble que en B y C juntas. Transcurrido un año, las acciones de la empresa A se han revalorizado un 4 %, las de B un 5 % y las de C han perdido un 2 % de su valor original. Como resultado de todo ello, Juan ha obtenido un beneficio de 432,5 €. Determina cuánto invirtió en cada una de las empresas.

**Resolución**

Sean $x$, $y$, $z$ la cantidad invertida en acciones de las empresas A, B y C, respectivamente.
Debe cumplirse que:

$$\begin{cases} x+y+z=12000 \\ x=2(y+z) \\ 0,04x+0,05y-0,02z=432,5 \end{cases}.$$

Puede resolverse por sustitución (la $x$ de la segunda ecuación se sustituye en las otras dos).

$$\begin{cases} 2(y+z)+y+z=12000 \\ 0,04 \cdot 2(y+z)+0,05y-0,02z=432,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=4000 \\ 13y+6z=43250 \end{cases} \underset{E2-6E1}{\Rightarrow} \begin{cases} y+z=4000 \\ 7y=19250 \end{cases}$$

Despejando:
$y = 2750$ €; $z = 1250$ €; $x = 8000$ €.

**4º) Considera las matrices** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

**a) Determina los valores de** $\mathrm{k}$ **para los que la matriz** $\mathrm{A}$ **tiene inversa.**
**b) Calcula la matriz inversa de** $\mathrm{A}$ **para** $\mathrm{k}=0$ **y resuelve la ecuación** $\mathrm{X} \cdot \mathrm{A} - \mathrm{B} = \mathrm{C}$

**Resolución**

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-k \ ; \ 1-k=0 \Longrightarrow k=1$

La matriz $A$ tiene inversa para todo $k$ real distinto de 1

b) $k=0$ ; Inversa de $A$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \ ; \ A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot A - B = C \Leftrightarrow X \cdot A = B + C \Leftrightarrow X = (B+C) \cdot A^{-1} \ ; \ B + C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La solución es: $X = (B+C) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

**5º) Considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real** $a$**:**

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ 2x - y + az = 3a \\ ax - y + 2z = 6 \end{cases}$$

**a) Discute el sistema según los valores del parámetro** $a$**.**
**b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.**

**Resolución**

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & -1 & a & 3a \\ a & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - a^2 - 2 + a + 4 + a = -a^2 + 2a$$

$|A| = 0 \Leftrightarrow -a^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$

**Caso 1** $\forall a \in \mathbb{R}\ \ a \neq 0\,, a \neq 2\ \ |A| \neq 0$. Por tanto $rg(A) = 3 = rg(A^*) = n^{o}\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

**Caso 2** $a = 0$. En este caso $|A| = 0\ \ y\ \ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, en $A$ hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada $A^*$:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de $A^*$ :

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ ; Por tanto $rg(A^*) = 3$

$$2 = rg(A) \neq rg(A^*) = 3:\ \ Sistema\ Incompatible, no\ tiene\ solución$$

**Caso 3** $a = 2$. En este caso $|A| = 0\ \ y\ \ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, en $A$ hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada $A^*$:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de $A^*$ :

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} \overset{C_3 = 2 \cdot C_1}{\cong} 0$ ; Por tanto $rg(A^*) = 2$

$rg(A) = rg(A^*) = 2 < n^{o}\ incógnitas$: $Sistema\ Compatible\ Indeterminado$.

b) Resolvemos para $a = 2$.

Observando el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz $A$, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 6 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz $A$, es decir $x$ e $y$. La incógnita $z$ actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$z = t$; $\begin{cases} x - y = 2 - t \\ 2x - y = 6 - 2t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, de donde $x = 4 - t\ ;\ y = 2$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$