EVAU Junio 2024. Opción B

1º) Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ **y** $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **con** $b \neq 0$**. Se pide:**

a) Encontrar todos los valores de b **para los que se verifica** $BCB^{-1} = A$**.**

b) Calcular el determinante de la matriz AA^t.

c) Resolver el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **para** $b = 1$.

Resolución

a) $BCB^{-1} = A \Leftrightarrow BC = AB$

$$BC = b\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix};\ AB = b\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto $BC = AB$ y, en consecuencia, $BCB^{-1} = A \ \ \forall b \in \mathbb{R} - \{0\}$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12 \ ; \ |AA^t| = |A||A^t| = |A|^2 = 144$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Escalonamos la matriz utilizando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -y - z = -7 \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{de donde } z = 5 \ ; \ y = 2 \ ; \ x = -6$$

2º) Calcule:

a) $\int_1^e (x+2)lnx\, dx$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(tg\,\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{cosx}}$

Resolución

a) Calculamos, por partes, la integral indefinida:

$$\int (x+2)lnx\, dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)lnx - \int \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\frac{1}{x}dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)lnx - \int \left(\frac{x}{2} + 2\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)lnx - \frac{x^2}{4} - 2x + c$$

$$\begin{matrix} u = lnx \\ dv = x + 2\, dx \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \int (x+2)dx = \frac{x^2}{2} + 2x \end{matrix}$$

$$\int_1^e (x+2)lnx\, dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)lnx - \frac{x^2}{4} - 2x\right]_1^e = \frac{e^2}{2} + 2e - \frac{e^2}{4} - 2e + \frac{1}{4} + 2 =$$

$$= \frac{e^2 + 9}{4}$$

b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\,\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{cosx}} \overset{1^{\infty}}{\triangleq} e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{cosx}\cdot\left(tg\frac{x}{2}-1\right)\right]} = e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg\frac{x}{2}-1}{cosx}} \overset{L'Hop}{\triangleq} e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{2}\left(1+tg^2\frac{x}{2}\right)}{-senx}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

3º) Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices de un tetraedro sólido $P_1, P_2, P_3\ y\ P_4$. Se sabe que $P_1(1,1,1), P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuarto punto $P_4(3,a,3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

a) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es 1. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a.

b) Dado el punto $Q(3,3,3)$, se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos $P_1\,P_2$, $P_1\,P_3$ y $P_1\,Q$ como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

Resolución

a) El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right]\right|$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,-1)\ ;\ \overrightarrow{P_1P_3} = (0,2,1)\ ;\ \overrightarrow{P_1P_4} = (2,a-1,2)$$

$$\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & a-1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & a-1 & 4 \end{vmatrix} = 9-a$$

$$Volumen = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right]\right| = \frac{|9-a|}{6} = 1 \begin{cases} 9-a=6 \Longrightarrow a=3 \\ 9-a=-6 \Longrightarrow a=15 \end{cases}$$

Para $a=3$ se comprueba fácilmente que los módulos de los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}\ y\ \overrightarrow{P_1P_4}$ son menores que 10 y la solución $a=3$ es válida.

Para $a=15$ se tiene que $\left|\overrightarrow{P_1P_4}\right| > 10$ y la solución $a=15$ no es válida.

b) Al tratarse de un paralelepípedo, si suponemos que $P_1, P_2\ y\ P_3$ determinan las aristas de la base y los vértices de la base inferior son $P_1, P_2, P_3\ y\ A$ y los de la superior $B, C\ y\ D$, se tiene que:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_3A} \Longleftrightarrow A(2,3,1)$$

De forma análoga se obtiene $B(3,5,4)$, $C(4,3,2)$ y $D(4,5,3)$

4) Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.

b) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

Resolución

a) Los resultados posibles que se pueden dar al lanzar dos dados son $VR_{6,2} = 6^2 = 36$

La puntuación 10 se obtiene cuando los resultados de los números que muestran los dados azul y rojo, respectivamente, son (2, 4), (4, 3), (6,2) y (5, 5), es decir, 4 casos favorables de 36 posibles. Así, aplicando la regla de Laplace:

$$p(\text{"}Obtener\ puntuación\ 10\text{"}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

El suceso puntuación impar final solo se puede obtener si el dado azul muestra número impar y el rojo par, por la propia regla del juego. Así, los casos favorables a este suceso son:

$$(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4)\,y\ (5,6)$$

Por tanto, aplicando nuevamente la regla de Laplace, se tiene que:

$$p(\text{Puntuación impar}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

b) Sean los sucesos $S =$ La puntuación final ha sido 8 $y\ A = "Sale\ número\ par\ en\ dado\ azul"$

$$p(A|S) = \frac{p(A \cap S)}{p(S)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{3}{5}$$