1º) Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm **la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir** 7 cm **para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.**

Resolución

$x \equiv$ "$lontitud, en\ cm, de\ un\ listón\ largo$"
$y \equiv$ "$lontitud, en\ cm, de\ un\ listón\ intermedio$"
$z \equiv$ "$lontitud, en\ cm, de\ un\ listón\ corto$"

El sistema de ecuaciones es $\left\{\begin{array}{c} 2x+4y=3y+15z \\ x=y+z+17 \\ x+y=9z+7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x+y-15z=0 \\ x-y-z=17 \\ x+y-9z=7 \end{array}\right.$

Resolvemos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -15 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 17 \\ 1 & 1 & -9 & 7 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 1 & 1 & -9 & 7 \\ 2 & 1 & -15 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 0 & 2 & -8 & -10 \\ 0 & 3 & -13 & -34 \end{pmatrix} \leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & -13 & -34 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -19 \end{pmatrix}$$

$\left\{\begin{array}{c} x-y-z=17 \\ y-4z=-5 \\ -z=-19 \end{array}\right.$ de donde $z=19\ cm$; $y=71\ cm$; $x=107\ cm$

2º) Para la función $f(x)=x^4+\pi x^3+\pi^2x^2+\pi^3x+\pi^4$, se pide:
a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x=\pi$.
b) Probar que $f(x)$ tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi,0)$ $u$tilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.
Si $g=f(-x)$ calcula el área entre las gráficas de $f(x)$ y g(x) en el intervalo$[0,\pi]$

Resolución

a) La función es polinómica y, por tanto, continua y derivable en el conjunto de los números reales.

$f'(x)=4x^3+3\pi x^2+2\pi^2x+\pi^3$

La recta tangente t en la abscisa $x=\pi$ es $t\equiv y-f(\pi)=f'(\pi)\cdot(x-\pi)$;

$$f(\pi)=\pi^4+\pi\pi^3+\pi^2\pi^2+\pi^3\pi+\pi^4=5\pi^4 \ \ ; \ \ f'(\pi)=4\pi^3+3\pi\pi^2+2\pi^2\pi+\pi^3=10\pi^3$$

$$t\equiv y-5\pi^4=10\pi^3\cdot(x-\pi) \ ; \ t\equiv y=10\pi^3x-5\pi^4$$

b) Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo $(-\pi,0)$ se tiene:

$$\left.\begin{array}{c} f(x)\ continua\ en\ [-\pi,0] \\ f(x)\ derivable\ en\ (-\pi,0) \\ \pi^4=f(-\pi)=f(0) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_1\in(-\pi,0)\ tal\ que\ f'(x_1)=0$$

Sea $g(x)=f'(x)=4x^3+3\pi x^2+2\pi^2x+\pi^3$ continua y derivable en $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

Aplicando el teorema de Bolzano a la función $g(x)$ en el intervalo $(-\pi,0)$ se tiene:

$$\left.\begin{array}{c} g(x)\ continua\ en\ (-\pi,0) \\ g(-\pi)=-2\pi^3<0 \\ g(0)=1>0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists x_1\in(-\pi,0)\ tal\ que\ g(x_1)=f'(x_1)=0$$

c) $g(x)=f(-x)=x^4-\pi x^3+\pi^2x^2-\pi^3x+\pi^4$

Igualando las ecuaciones de ambas funciones para hallas sus puntos de corte, obtenemos:

$$x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4 = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4$$

$$2\pi x^3 + 2\pi^3 x = 0 \Leftrightarrow 2\pi x(x^2 - \pi^2)\begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\pi \end{cases}$$

$$A = \left|\int_0^\pi (f(x) - g(x))\,dx\right| = \left|\int_0^\pi (2\pi x^3 + 2\pi^3 x)\,dx\right| = \left[2\pi\left(\frac{x^4}{4} + \frac{\pi^2 x^2}{2}\right)\right]_0^\pi = \left[\pi\left(\frac{x^4}{2} + \pi^2 x^2\right)\right]_0^\pi = \frac{3}{2}\pi^5\ u^2$$

3º) Dados los puntos $A(0,0,1) y\ B(1,1,0)$, se pide:

a) Halla una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z = 0$.

b) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2, que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x + z = 1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

Resolución

a) El plano que buscamos pasará por el punto $A(0,0,1)$ y tendrá la dirección del vector normal del plano $z = 0$, que es $\vec{n}$=$(0,0,1)$ y la del vector $\overrightarrow{AB} = (1,1,-1)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \quad x - y = 0$$

b) Los puntos dados están en el plano $x + z = 1$ porque sus coordenadas cumplen la ecuación.

El vector director de la recta r_1 será $\vec{u} = (a,b,c)$. Al estar la recta contenida en el plano $x + z = 1$ cuyo vector normal es $\vec{n} = (1,0,1)$, se tiene que $\vec{u}\cdot\vec{n} = a + c = 0$, de conde $c = -a$.

Por tanto, el vector director de la recta r_1 será $\vec{u} = (a,b,-a) = a\left(1,\frac{b}{a},-1\right) = a(1,k,-1)\quad a\neq 0$

Tomemos la dirección del vector $\vec{v} = (1,k,-1)$

Como la recta r_2 es paralela a r_1, imponiendo la condición de que la distancia entre ellas sea 1, tenemos:

$$d(r_1,r_2) = 1 \Leftrightarrow d(A,r_2) = 1 \Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{v}|}{|\vec{v}|} = 1$$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & k & -1 \end{vmatrix} = (k-1)\vec{i} + (k-1)\vec{k}\ ;\ |\overrightarrow{AB}\wedge\vec{v}| = \sqrt{2(k-1)^2}\ ;\ |\vec{v}| = \sqrt{2+k^2}$$

$$\frac{|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{v}|}{|\vec{v}|} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2(k-1)^2} = \sqrt{2+k^2} \Longrightarrow 2k^2 - 4k + 2 = 2 + k^2 \Longrightarrow k^2 - 4k = 0$$

de donde obtenemos $k = 0\ y\ k = 4$

Para $k = 0$, $\vec{v} = (1,0,-1)$ y la recta $r_1(A,\vec{v}) \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}$

Para $k = 4$, $\vec{v} = (1,4,-1)$ y la recta $r_2(B,\vec{v}) \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = -t \end{cases}$

4) Sabiendo que $p(\bar{A}) = \frac{11}{20}$, $p(A/B) - p(B/A) = \frac{1}{24}$ y $p(A\cap\bar{B}) = \frac{3}{10}$, se pide:

a) Calcular $p(A\cap B)$ y $p(B)$.

b) Calcular $p(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica $p(A\cup C) = \frac{14}{25}$

Resolución

a) $p(A) = 1 - p(\bar{A})$=$1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$

$$p(A\cap\bar{B}) = \frac{3}{10} \Leftrightarrow p(A) - p(A\cap B) = \frac{3}{10} \Leftrightarrow p(A\cap B) = \frac{9}{20} - \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$$

$$p(A/B)-p(B/A)=\frac{1}{24}\Leftrightarrow\frac{p(A\cap B)}{p(B)}-\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{1}{24}\Leftrightarrow p(B)=\frac{p(A\cap B)}{\frac{1}{24}+\frac{p(A\cap B)}{p(A)}}$$

$$p(B)=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{24}+\frac{\frac{3}{20}}{\frac{9}{20}}}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{24}+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{9}{24}}=\frac{2}{5}$$

b) $p(A\cup C)=\frac{14}{25}\Leftrightarrow p(A)+p(C)-p(A\cap C)=\frac{14}{25}\Leftrightarrow\frac{9}{20}+p(C)-\frac{9}{20}\cdot p(C)=\frac{14}{25}\Leftrightarrow$

$$\frac{11}{20}p(C)=\frac{11}{100}\Longrightarrow p(C)=\frac{1}{5}$$