1º) Una empresa cinematográfica dispone de tres salas, A, B y C. Los precios de entrada a estas salas son de 3, 4 y 5 euros, respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 720 euros y el número total de espectadores fue de 200. Si los espectadores de la sala A hubieran asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A, se hubiese obtenido una recaudación de 20 euros más. Plantea un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de espectadores que acudió a cada una de las salas.

Resolución

Sean x, y, z el número de espectadores de las salas A, B y C respectivamente. Del enunciado, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+z=200 \\ 3x+4y+5z=720 \\ 4x+3y+5z=740 \end{cases}$$

Vamos a utilizar el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 3 & 4 & 5 & 720 \\ 4 & 3 & 5 & 740 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2-3\cdot F_1 \\ F_3-4\cdot F_1}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 2 & 120 \\ 0 & -1 & 1 & -60 \end{pmatrix} \underset{F_3+F_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 2 & 120 \\ 0 & 0 & 3 & 60 \end{pmatrix}$$

El sistema escalonado equivalente es:

$$\begin{cases} x+y+z=200 \\ \quad y+2z=120 \\ \qquad 3z=60 \end{cases} \quad \text{cuya solución es } z=20;\, y=80;\, x=100$$

Por tanto, 100 espectadores en la sala A, 80 en la B y 20 en la C.

2º) Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 8 \\ -1 & a & -6 \end{pmatrix}$

a) Determina para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es invertible A.

b) Calcula A^{-1} para $a=0$

c) Para $a=0$, resuelve el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Resolución

a) Calculamos el determinante de la matriz A: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 8 \\ -1 & a & -6 \end{vmatrix} = a^2+10a-24$

Vemos qué valores anulan el determinante: $a^2+10a-24=0 \Longrightarrow \begin{cases} a=-12 \\ a=2 \end{cases}$

Por lo tanto A *es* invertible $\forall a \in \mathbb{R}-\{-12, 2\}$.

b) $a=0$. En este caso la matriz es $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ y su determinante $|A|=-24$

Los adjuntos son:

$A_{11}=0;\ A_{12}=-8;\ A_{13}=0\,;A_{21}=18\,;A_{22}=-5\,;A_{23}=-3\,;\ A_{31}=24\,;A_{32}=-8\,;A_{33}=0$

La matriz inversa es: $A^{-1}=\frac{-1}{24}\begin{pmatrix} 0 & 18 & 24 \\ -8 & -5 & -8 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

c) Para $a=0$, $|A|=-24$ y, por tanto $rg(A)=3$

Al tratase de un sistema homogéneo la única solución posible es la trivial $x=y=z=0$

3º) Se divide un hilo de 100 metros en dos trozos, de longitudes x e y. Con el trozo de longitud x se construye un cuadrado y con el de longitud y se forma un rectángulo, cuyo lado mayor es el doble del menor. Averigua x e y para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

Resolución

Sean x e y las longitudes de la partición del hilo.

Planteamiento del problema: $\left[\begin{array}{ll} minimizar\ \ S(x,y)=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{y^2}{18} & función\ objetivo \\ \quad s.a\ \ x+y=100 & restricción \end{array}\right.$

Despejando de la restricción tenemos: $y=100-x$ y, sustituyendo en la función objetivo:

$S(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{(100-x)^2}{18}$ que es la función suma de áreas dependiente de una sola variable.

Buscamos el mínimo de la función $S(x)$:

$S'(x)=\frac{x}{8}-\frac{100-x}{9}$; $S'(x)=0 \iff \frac{x}{8}-\frac{100-x}{9}=0 \iff \frac{x}{8}=\frac{100-x}{9} \iff 17x=800 \iff x=\frac{800}{17}m$

$y=100-\frac{800}{17}=\frac{900}{17}m$

Comprobamos que, efectivamente, el valor $x=\frac{800}{17}$ es mínimo de la función suma $S(x)$:

$S''(x)=\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$; $S''\left(\frac{800}{17}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{9}>0$ Mínimo en $x=\frac{800}{17}$.

Los valores que minimizan la suma de áreas son:

$$x=\frac{800}{17}\cong 47{,}059\ m \quad e \quad y=\frac{900}{17}\cong 52{,}941\ m$$

4º) Considera la función $f(x)=x\cdot lnx$. Determina:

a) su dominio, ceros y extremos.

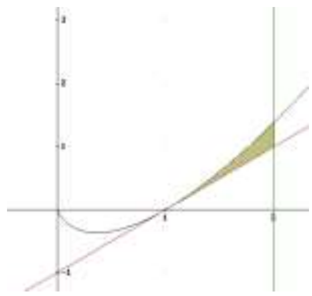
b) el área de la región plana limitada por la gráfica de esa función, su recta tangente en el punto de abscisa $x=1$ y la recta $x=2$.

Resolución

a) $Dom(f)=(0,+\infty)$; $x\cdot lnx=0 \Longrightarrow lnx=0 \Longrightarrow x=1$ cero de la función.

$f'(x)=lnx+1$; $f'(x)=0 \iff lnx+1=0 \iff x=\frac{1}{e}$; $f''(x)=\frac{1}{x}$; $f''\left(\frac{1}{e}\right)=e>0$

Mínimo relativo en el punto $P\left(\frac{1}{e},\frac{-1}{e}\right)$



b) Recta tangente en el punto de abscisa $x=1$: $f(1)=0$; $f'(1)=1$; $t\equiv y=x-1$

$$Área=\int_1^2(xlnx-x+1)dx=\left[\frac{x^2}{2}\left(lnx-\frac{3}{2}\right)+x\right]_1^2=2ln2-\frac{5}{4}\ u$$

$$\int xlnx\,dx=\frac{x^2}{2}lnx-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\left(lnx-\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{array}{l} u=lnx \\ dv=xdx \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} du=\frac{1}{x} \\ v=\int dv=\int x\,dx=\frac{x^2}{2} \end{array}$$

5º)

a) Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-cosx}{sen^2x}$

b) Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=\frac{x^3+x-1}{x^2+x}$ tal que $F(1)=0$

Resolución

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-cosx}{sen^2x}\overset{\frac{0}{0}L`Hôp}{\cong}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1+senx}{2senxcosx}\overset{\frac{0}{0}L`Hôp}{\cong}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+cosx}{2(cos^2x-sen^2x)}=\frac{2}{2}=1$

b) $F(x)=\int\frac{x^3+x-1}{x^2+x}dx=\int(x-1)dx+\int\frac{2x-1}{x^2+x}dx=\frac{x^2}{2}-x+I_1$

$$I_1 = \int \frac{2x-1}{x^2+x}\,dx = \int \frac{2x-2}{x(x+1)}\,dx =$$

Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{2x-1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}$$

$$2x-2 = A\cdot(x+1)+Bx$$

Sustituyendo $x=0$ y $x=-1$ obtenemos $\begin{cases} -1 = A \\ -3 = -B \end{cases}$ de donde $A=-1$ y $B=3$

Por tanto:

$I_1 = \int \frac{2x-2}{x^2+x}\,dx = \int \frac{2x-2}{x(x+1)}\,dx = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{3}{x+1}\,dx = -L|x| + 3L|x+1| + c_1$

Así,

$$F(x) = \int \frac{x^3+x-1}{x^2+x}dx = \frac{x^2}{2} - x - L|x| + 3L|x+1| + c$$

$$F(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - 1 + 3L2 + c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2} - 3L2$$

La primitiva que buscamos es $F(x) = \frac{x^2}{2} - x - L|x| + 3L|x+1| + \frac{1}{2} - 3L2$

6º] Una persona cuida de su jardín, pero es bastante descuidada y se olvida de regarlo dos de cada tres días. El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se riega es de 0,25.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el jardín progrese?

b) Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?

Resolución

Consideramos los sucesos siguientes:

$P = "\ El\ jardín\ progresa"$

$R = "El\ jardín\ ha\ sido\ regado"$

Del enunciado, $p(R) = \frac{1}{3}$; $p(\bar{R}) = \frac{2}{3} p(P|R) = p(\bar{P}|R) = 0{,}5$; $p(P|\bar{\bar{R}}) = 0{,}25$; $p(\bar{P}|\bar{\bar{R}}) = 0{,}75$

a) $p(P) \overset{P.Total}{\cong} p(R)\cdot p(P|R) + p(\bar{R})\cdot p(P|\bar{R}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

b) $p(\bar{R}|\bar{P}) \overset{T.Bayes}{\cong} \frac{p(\bar{R}\cap\bar{P})}{p(\bar{P})} = \frac{p(\bar{R})\cdot p(\bar{P}|\bar{R})}{1-p(P)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$

7º] La probabilidad de que deje de fumar un paciente, que se ha sometido a un régimen médico riguroso, es de 0,8. Se eligen 100 pacientes, que se han sometido a dicho régimen.

Considera la variable aleatoria $X = “número\ de\ personas\ que\ dejan\ de\ fumar”$

Utilizando la aproximación de la binomial por la normal, calcula:

a) La probabilidad de que hayan dejado de fumar entre 74 y 85 pacientes, no incluidos.

b) La probabilidad de que dejen de fumar al menos 75 personas.

Resolución

Definimos la variable $X =$ "Número de pacientes que dejan de fumar"; $X \to B(100{,}0'8)$

Como $n\cdot p = 80 > 10$ y $\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} = 4$, se puede aproximar $X \to N(80,4)$

a) $\quad p(74 < X < 85) =^{Tipificamos} = p\left(\frac{74-80}{4} < Z < \frac{85-80}{4}\right) = p(-1{,}5 < Z < 1{,}25) =$

$$= p(Z < 1{,}25) - \left(1 - p(Z < 1{,}5)\right) = 0{,}8944 - 1 + 0{,}9332 = 0{,}8276$$

b) $p(X \geq 75) = 1 - p(X < 75) =^{Tificamos} = 1 - p\left(Z < \frac{75-80}{4}\right) = 1 - p(Z < -1{,}25) = p(Z \leq 1{,}25) = 0{,}8944$

8º] Dado el punto $P(3,5,-1)$, la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z+1}{4}$ y el plano $\pi \equiv 3x - 2y + z - 5 = 0$, se pide determinar:

a) el punto Q de r tal que el vector de extremos P y Q es paralelo al plano π.

b) la ecuación del plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.
c) el ángulo que forman la recta r y el plano π.

Resolución

a) Punto genérico de la recta r: $Q(1+2t, -2+t, -1+4t)$; Vector $\overrightarrow{PQ} = (2t-2, t-7, 4t)$
Vector normal del plano $\vec{n} = (3, -2, 1)$
Imponiendo la condición pedida: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 - 2t + 14 + 4t = 0 \Leftrightarrow 8t = -8 \Leftrightarrow t = -1$
El punto buscado es $Q(-1, -3, -5)$

b) El plano buscado tendrá la dirección de la recta $\vec{v} = (2, 1, 4)$, pasará por un punto de ella $R(1, -2, -1)$ y tendrá la dirección de $\vec{n} = (3, -2, 1)$:

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 9(x-1) + 10(y+2) - 7(z+1) = 0$$

$$\pi' \equiv 9x + 10y - 7z + 4 = 0$$

c)

$$sen(\widehat{r,\pi}) = \cos(\widehat{\vec{n},\vec{v}}) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|6-2+4|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = \frac{8}{\sqrt{294}} \cong 0{,}46657 \Longrightarrow (\widehat{r,\pi}) = 30{,}9°$$
