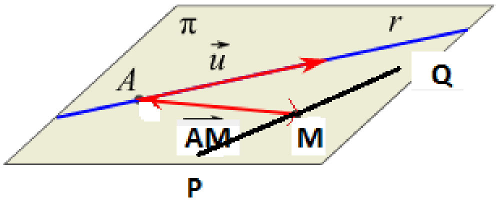
1º) Dada la recta de ecuación $r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{3}$ determina

a) la ecuación general del plano que la contiene y pasa por el punto medio del segmento de extremos los puntos $P(1,1,0) y\ Q(-1,3,2)$.

b) el ángulo que forma la recta con el plano OXZ.

Resolución



a) Vector director $\vec{u}$ de la recta r: $\vec{u} = (2,-2,3)$

Punto de r: $A(2,-1,3)$

Punto medio M del segmento de extremos los puntos $P\ y\ Q$: $M(0,2,1)$

El plano π que buscamos pasará por el punto M y tendrá la dirección de los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{AM}$:

$\overrightarrow{AM} = (-2,3,-2)$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv 5x + 2y - 2z - 2 = 0$$

b) Plano $OXZ \equiv\ y = 0$; Vector normal: $\vec{n} = (0,1,0)$; Vector director $\vec{u}$ de la recta r: $\vec{u} = (2,-2,3)$

$$sen(\widehat{r,OXZ}) = |\cos(\widehat{\vec{n},\vec{u}})| = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|} = \frac{|-2|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{17}} = \frac{2}{\sqrt{17}} \cong 0{,}4851 \Longrightarrow (\widehat{r,OXZ}) = 29{,}017°$$

2º) Considera la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ y el punto $P(1,2,-1)$.

a) Halla la ecuación del plano π que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r.

b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas OX, OY y OZ.

Resolución

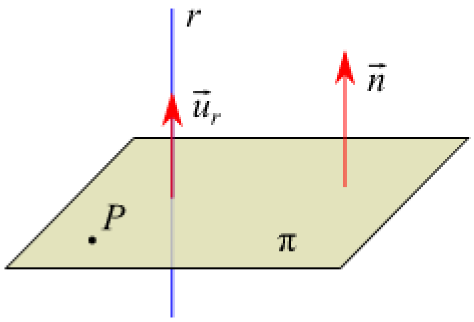
a)

$$r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \qquad P = (1,2,-1)$$

a)

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,2) = \vec{n} \qquad \text{vector normal del plano}$$

[el vector de dirección $\vec{u}_r$ de la recta se obtiene a través del producto vectorial de los dos vectores $(1,-1,0)$ y $(1,1,-1)$ normales (característicos) de los dos planos que determinan r]

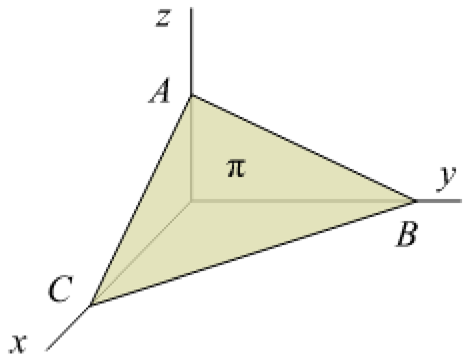


El plano que buscamos tendrá por ecuación general $\pi \equiv x + y + 2z + D = 0$

$$P \in \pi \Longrightarrow 1 + 2 - 2 + D = 0 \Longrightarrow D = -1$$

El plano es $\pi \equiv x + y + 2z - 1 = 0$

b)



$$x=0, y=0 \Rightarrow z=1/2; \quad A\,(0,0,1/2) \quad \text{corte con } OZ$$
$$x=0, z=0 \Rightarrow y=1; \quad B\,(0,1,0) \quad \text{corte con } OY$$
$$y=0, z=0 \Rightarrow x=1; \quad C\,(1,0,0) \quad \text{corte con } OX$$
$$\overrightarrow{AB}=(0,1,-1/2)\ ;\ \overrightarrow{AC}=(1,0,-1/2)$$
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{vmatrix}=\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-1\right)$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+1}=\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$
$$\boxed{\text{área del triángulo } ABC=\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3}{2}}=\tfrac{\sqrt{6}}{4}\,u^2}$$

3º) Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=\ \ -t \\ z=2-3t \end{cases}$ $\quad y \quad$ $r_2 \equiv \begin{cases} x=\ \ s \\ y=-2s \\ z=2-3s \end{cases}$

a) Estudia su posición relativa.

b) Calcula, en forma paramétrica, la ecuación de la recta p perpendicular común.

c) Calcula la distancia entre ellas.

Resolución

a) Vector director $\vec{u}$ de la recta r_1: $\vec{u}=(1,-1,-3)$; Punto de r_1: $A(1,0,2)$

Vector director $\vec{v}$ de la recta r_2: $\vec{v}=(1,-2,-3)$; Punto de r_2: $B(0,0,2)$

Como $rg(\vec{u},\vec{v}) = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}=2$, al ser $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, las rectas se cortan o se cruzan.

Vector $\overrightarrow{AB}=(-1,0,0)$

Como $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}=3\neq 0$, se tiene que $rg\left(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\ \right)=3$ *y las rectas se cruzan*

b) Punto genérico de r_1: $P(1+t,-t,2-3t)$; Punto genérico de r_2: $Q(s,-2s,2-3s)$

$\overrightarrow{PQ}=(s-t-1,-2s+t,-3s+3t)$ es vector director de la recta perpendicular común a las rectas dadas. Por tanto, debe ocurrir a la vez

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{PQ}=0 \Leftrightarrow s-t-1+2s-t+9s-9t=0$$
$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{PQ}=0 \Leftrightarrow s-t-1+4s-2t+9s-9t=0$$
$$\begin{cases} 12s-11t=1 \\ 14s-12t=1 \end{cases} \Leftrightarrow t=-\frac{1}{5}\ ;\ s=-\frac{1}{10}$$

Los puntos son $P\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5},\frac{13}{5}\right)$ y $Q\left(-\frac{1}{10},\frac{1}{5},\frac{23}{10}\right)$ y el vector $\overrightarrow{PQ}=\left(-\frac{9}{10},0,-\frac{3}{10}\right)$

Si consideramos como vector director de la recta perpendicular común $-10\cdot\overrightarrow{PQ}=(9,0,3)$ la ecuación de ésta $p\left(P,10\cdot\ \overrightarrow{PQ}\right)$ *es*:

$$p \equiv \begin{cases} x = \dfrac{4}{5} + 9t \\ y = \dfrac{1}{5} \\ z = \dfrac{13}{5} + 3t \end{cases}$$

c) $d(r,s) = d(p,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\left(\frac{-9}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{90}{100}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ unidades

---

Puntuación

1, 2 ---------- 3 puntos

3 ------------ 4 " $\begin{cases} a)\ y\ c)\ \ 1\ punto \\ b)\ \ 2\ \ puntos \end{cases}$