1º)

a) Discute el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x+(m^2+1)y+z=1 \\ 2x+6y-2z=3m \\ x+y+z=-1 \end{cases}$, según los valores del parámetro m.

b) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determina la matriz X tal $X\cdot B=A$

Resolución

a) $M=\begin{pmatrix} 3 & m^2+1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $M^*=\begin{pmatrix} 3 & m^2+1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 & 3m \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$|M|=4(2-m)(2+m)$; $|M|=0 \Leftrightarrow m=2$; $m=-2$

Caso 1 $\forall m\in\mathbb{R}-\{-2,2\}$ $|M|\neq 0$. Por tanto $rg(M)=3=rg(M^*)=nº\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $m=-2$. En este caso $|M|=0\ y\ rg(M)<3$

Matriz de coeficientes $M=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz M:

Como $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=8\neq 0$, en M hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(M)=2$, $rg(M^*)\geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada M^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de M, con la tercera fila y cuarta columna de M^* :

$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}=-24\neq 0$; Por tanto $rg(M^*)=3$

$$2=rg(M)\neq rg(M^*)=3 \quad \text{Sistema Incompatible (No tiene solución)}$$

Caso 3 $m=2$. En este caso $|M|=0\ y\ rgM<3$

Matriz de coeficientes $M=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $M^*=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz M:

Como $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=8\neq 0$, en M hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(M)=2$, $rg(M^*)\geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada M^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de M, con la primera fila y cuarta columna de M^* :

$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$ $rg(M)=rg(M^*)=2<nº\ incóg$. Sistema Compatible Indeterminado

b) $XB=A\Leftrightarrow X=AB^{-1}$

Calculamos la inversa de la matriz B:

Como $|B|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\overset{Col1+Col3}{=}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$, existe B^{-1}

$B_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$; $B_{12}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2$; $B_{13}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$

$B_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$; $B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $B_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$B_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $B_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $B_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

Matriz adjunta de B: $Adj(B) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz inversa de B: $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot (Adj(B))^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = AB^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2º)

En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El $10\,\%$ de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuanta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

Resolución

$x =$ "*número de camiones tipo A*"

$y =$ "*número de camiones tipo B*"

$z =$ "*número de camiones tipo C*"

Del enunciado, obtenemos: $\begin{cases} x + 1 = y + z \\ 0{,}1 \cdot 24y = \frac{28z}{7} \\ 14x + 24y + 28z = 302 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = -1 \\ 3y - 5z = 0 \\ 7x + 12y + 14z = 151 \end{cases}$

Resolviendo el sistema por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 7 & 12 & 14 & 151 \end{pmatrix} \underset{F_3 - 7F_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 19 & 21 & 158 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{3}F_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -5/3 & 0 \\ 0 & 19 & 21 & 158 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\longleftrightarrow}{F_3 - 19F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 158/3 & 158 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = -1 \\ y - \frac{5}{3}z = 0 \\ \frac{158}{3}z = 158 \end{cases}$$ de donde $z = 3$; $y = 5$; $x = 7$

3º)

Se considera la función $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2+1}$ y se pide:

a) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.

c) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

Resolución

a) Obtenemos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2+1) - 2xe^{-x}}{(x^2+1)^2} = \frac{-e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)^2}{(x^2+1)^2}$$

La recta tangente t en la abscisa $x = 0$ es $t \equiv y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$;

$$f(0) = 1 \;\; ; \;\; f'(0) = -1$$

$$t \equiv y - 1 = -(x - 0) \; ; \;\; t \equiv y = -x + 1$$

b) Numerador y denominador están definidos en $\mathbb{R}$ y $x^2 + 1 \neq 0$. Por tanto $Dom(f) = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^2+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}L'Hop}{\cong}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}L'Hop}{\cong}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1)}{e^x(x^2+1)}\overset{\frac{1}{\infty}}{\cong}0$$

La recta $y=0$ *es asíntota horizontal en* $x\to+\infty$.

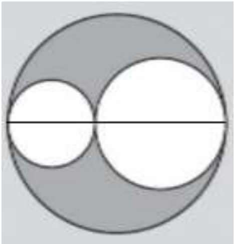
Asíntotas verticales no tiene porque $\lim_{x\to a}\frac{e^{-x}}{x^2+1}=\frac{1}{e^a(a^2+1)}\neq\infty$ porque $e^a(a^2+1)>0$

c) Estudiamos el signo de la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}(x+1)^2}{(x^2+1)^2}<0\quad al\ ser\ e^{-x}>0$$

Por tanto, la función $f(x)=\frac{e^{-x}}{x^2+1}$ es decreciente en $\mathbb{R}$ y no tiene extremos relativos

4º) En una circunferencia de 10 cm de radio, se divide uno de sus diámetros en dos partes que se toman como diámetros de dos circunferencias tangentes interiores a ella. ¿Qué longitud debe tener cada uno de estos diámetros para que sea máxima el área delimitada por las tres circunferencias? (Región sombreada)



Resolución

Sean x, y las longitudes de cada diámetro.
Es claro que $x+y=20$ es la restricción del problema.

El área de la figura sombreada es la diferencia entre el área de la circunferencia dada y la suma de las áreas de las interiores de radios $\frac{x}{2}$ e $\frac{y}{2}$.

El planteamiento es: $\left[\begin{array}{lll} maximizar\ \ A(x,y)=100\pi-\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 & función\ objetivo \\ \qquad s.a \qquad x+y=20 & restricción\end{array}\right.$

Despejando y de la restricción, $y=20-x$. Sustituyendo en la función objetivo:

$$A(x)=100\pi-\pi\frac{x^2}{4}-\pi\frac{(20-x)^2}{4}=100\pi-\pi\frac{x^2-20x+200}{2}\quad maximizar$$

Derivando, $A'(x)=\frac{\pi}{2}(20-2x)$; $A'(x)=0\Leftrightarrow x=10$

$A''(x)=-\pi$ y $A''(10)=-\pi<0$. Por tanto, hemos encontrado el máximo de la función A.

El diámetro de cada circunferencia interior debe ser 10cm. Se trata de dos circunferencias de radio 5 cm cada una. El área delimitada máxima, sombreada, es $100\pi-25\pi-25\pi=50\pi\ \ cm^2$

5º)

a) Calcula $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$

b) Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

$$f(x)=2+x-x^2,\quad g(x)=2x^2-4x$$

Resolución

a) $\int x^2e^{-x}\,dx=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}\,dx\overset{[1]}{\cong}-x^2e^{-x}-2e^{-x}(x+1)=-e^{-x}(x^2+2x+2)$

$u=x^2\ ;\ du=2xdx$

$dv=e^{-x}dx\ ;\ v=\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}$

$\int xe^{-x}\,dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx=-xe^{-x}-e^{-x}=-e^{-x}(x+1)\quad[1]$

$u=x\ ;\ du=dx$

$dv = e^{-x}dx$; $v = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$

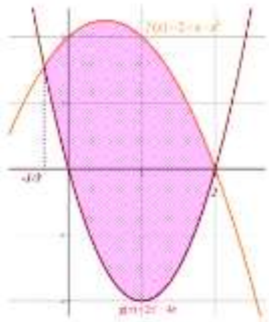
$$\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx = [-e^{-x}(x^2+2x+2)]_0^1 = -5e^{-1}+2 = 2-\frac{5}{e}$$

b)

Averiguamos sus puntos de corte para establecer el comienzo y final de la región limitada por ambas gráficas.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow 2+x-x^2 = 2x^2-4x \Rightarrow 0 = 3x^2-5x-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4(3)(-2)}}{6} = \frac{5\pm 7}{6} = \begin{cases} \frac{5+7}{6} = 2 \\ \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$



El área será el valor absoluto de la integral definida entre $-\frac{1}{3}$ y 2 de la diferencia de las funciones.

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{2} f(x)-g(x)dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{2} 2+x-x^2-(2x^2-4x)dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{2} 2+x-x^2-2x^2+4xdx = \int_{-\frac{1}{3}}^{2} -3x^2+5x+2dx =$$

$$= \left[-x^3+\frac{5}{2}x^2+2x\right]_{-\frac{1}{3}}^{2} = \left[-2^3+\frac{5}{2}2^2+2\cdot2\right]-\left[-\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(-\frac{1}{3}\right)\right]=$$

$$= -8+10+4-\frac{1}{27}-\frac{5}{18}+\frac{2}{3} = \frac{343}{54} \simeq 6.35$$

$$\boxed{Área = \left|\int_{-\frac{1}{3}}^{2} f(x)-g(x)dx\right| = \frac{343}{54} = 6.35\,u^2}$$

6º)

Una prueba diagnóstica para una enfermedad da resultado negativo el 5% de las veces que se aplica a un individuo que la padece y da resultado positivo el 10% de las veces que se aplica a un individuo que no la padece. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad afecta a 50 de cada diez mil personas. Si una persona elegida al azar se somete a la prueba diagnóstica, calcule la probabilidad de:

a) Que la prueba dé resultado positivo.
b) Que la persona padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido positivo.
c) Que la persona no padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido negativo.
d) Que el resultado de la prueba diagnóstica sea erróneo.

Resolución

Sean E "padece la enfermedad", P "resultado positivo en la prueba" y N "resultado negativo en la prueba". Tenemos que $p(E)=0.005$, $p(P|E)=0.95$, $p(P|\bar{E})=0.1$.

a) $p(P) = p(P|E)p(E)+p(P|\bar{E})p(\bar{E}) = 0.95\times0.005+0.1\times0.995 = 0.1042.$

b) $p(E|P) = \dfrac{p(P|E)p(E)}{p(P|E)p(E)+p(P|\bar{E})p(\bar{E})} = \dfrac{0.95\times0.005}{0.95\times0.005+0.1\times0.995} = 0.0455.$

c) $p(\bar{E}|N) = \dfrac{p(N|\bar{E})p(\bar{E})}{p(N)} = \dfrac{0.9\times0.995}{1-0.1042} = 0.9997.$

d) La probabilidad de que la prueba sea errónea es $p(P\cap\bar{E})+p(N\cap E) = p(P|\bar{E})p(\bar{E})+p(N|E)p(E) = 0.0997.$

7º)

El peso de los adultos de 40 años de una cierta comunidad se modela con una distribución normal de media 85 Kg y desviación típica 15 Kg.

a) Si se considera que un adulto de 40 años tiene sobrepeso si supera los 100Kg, ¿qué porcentaje de esa población tiene sobrepeso?

b) Se considera el colectivo de los individuos más delgados, que representa el 40% de todos los individuos de esa comunidad. ¿Cuál es el peso máximo de un individuo de ese colectivo?

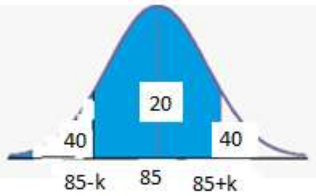
Resolución

Sea la variable aleatoria $X = "Peso\ de\ adultos\ de\ 40\ años"$. $X \hookrightarrow N(85, 15)$; $Z \hookrightarrow N(0, 1)$

a) $p(X > 100) = 1 - p(X \leq 100) = 1 - p\left(Z \leq \frac{100-85}{15}\right) = 1 - p(Z \leq 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

El porcentaje que tiene sobrepeso es el 15,87%

b)



$$p(X \leq 85 + k) = 0{,}6 \Leftrightarrow p\left(Z \leq \frac{k}{15}\right) = 0{,}6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{15} = 0{,}255 \Leftrightarrow k = 3{,}825$$

Así, $85 - k = 85 - 3{,}825 = 81{,}175$ Kg es el peso máximo de cualquier individuo de ese colectivo

8º) Considera el punto $P(1, 0, 1)$, la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x - 3y + 2z - 3 = 0$

a) Halla la ecuación general del plano π' que contiene a la recta r y pasa por el punto P.

b) Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta r' perpendicular al plano π que pasa por el punto medio del segmento de extremos el origen de coordenadas y el punto P.

c) Calcula el área del triangulo $\widehat{OPQ}$ siendo el punto $Q(-1, 2, 0)$

Resolución

a) Haz de planos que contiene a la recta r:

$$x + y - z - 1 + \lambda \cdot (2x + y + 2z) = 0$$

Como debe pasar por el punto $P(1, 0, 1)$,

$$1 - 1 - 1 + \lambda \cdot (2 + 2) = 0 \Leftrightarrow 4\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}$$

El plano que buscamos es $\pi' \equiv \ x + y - z - 1 + \frac{1}{4} \cdot (2x + y + 2z) = 0$

$$\pi' \equiv 6x + 5y - 2z - 4 = 0$$

b) El vector normal del plano π, que es $\vec{n} = (1, -3, \ 2)$ será el de dirección de la recta r'.

El punto medio M del segmento de extremos los puntos $O = (0, 0, 0)$ y $P(1, 0, 1)$ es $M\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

Así, unas ecuaciones paramétricas de la recta r' perpendicular al plano π que pasa M son:

$$r' \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = \quad -3t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = \frac{1}{2} + 2t \end{cases}$$

c) $\overrightarrow{OP} = (1, 0, 1)$; $\overrightarrow{OQ} = (-1, 2, 0)$ $rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$ al ser $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$$\left|\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OQ}\right| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} = (-2, -1, 2)$$

$$\text{Área}(\widehat{OPQ}) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OQ}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 1 + 4} = \frac{3}{2}\ u^2$$