1º) En un espacio muestral, A **y** B **son dos sucesos independientes tales que** $p(A \cap B) = 0{,}3$ **y** $p(A|B) = 0{,}5$. **Calcula:**

a) $p(A)$ **y** $p(B)$.
b) $p(A \cup B)$ **y** $p(B|A)$.
c) Probabilidad de que no ocurran ninguno de los dos sucesos.
d) $\boldsymbol{p(\bar{A}|B)}$.

Resolución

a)
Como los sucesos son independientes, se tiene que $0{,}5 = p(A|B) = p(A)$. Luego $p(A) = 0{,}5$

Por otro lado, $0{,}3 = p(A \cap B) \overset{A\ y\ B\ ind}{\cong} p(A) \cdot p(B) = 0{,}5 \cdot p(B)$, de donde $p(B) = \frac{0{,}3}{0{,}5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

b)
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}8$

$p(B|A) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$. También, como A y B son independientes $p(B|A) = p(B) = 0{,}6$

c) $p(\bar{A} \cap \bar{B}) \overset{Morgan}{\cong} p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

d) $p(\bar{A}|B) = 1 - p(A|B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

2º) En una famosa biblioteca, el 70% **de los libros son novelas, el** 40% **son clásicos anteriores al siglo XIX y el** 60% **de esos clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcula la probabilidad de que:**

a) no sea una novela, pero sí un clásico anterior al siglo XIX.
b) sea un clásico anterior al siglo XIX, sabiendo que es una novela.

Resolución

Consideramos los sucesos siguientes:
$N =$ El libro elegido es una novela ; $C =$ El libro elegido es un clásico anterior al siglo XIX
Del enunciado, $p(N) = 0{,}7$; $p(C) = 0{,}4$; $p(N|C) = 0{,}6$
a) $p(\bar{N} \cap C) = p(C \cap \bar{N}) = p(C) \cdot p(\bar{N}|C) = p(C) \cdot \left(1 - p(N|C)\right) = 0{,}4 \cdot (1 - 0{,}6) = 0{,}16$
b) $p(C|N) = \frac{p(C\cap N)}{p(N)} = \frac{p(C)\cdot p(N|C)}{p(N)} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{0{,}7} = \frac{0{,}24}{0{,}7} = \frac{24}{70} = \frac{12}{35} \approx 0{,}3429$

3º) Según los datos de la Fundación para la Diabetes, el $13{,}8\%$ **de los españoles mayores de 18 años tiene diabetes, aunque el** 43% **de ellos no sabe que la tiene. Se elige al azar un español mayor de 18 años.**
a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea diabético o no sepa que lo es?

Cierto test, diagnostica correctamente el 96% **de los casos de diabetes, pero da un** 2% **de falsos positivos, es decir da positivo en personas no enfermas de diabetes.**

c) ¿Cuál es la probabilidad de que dé positivo un español mayor de 18 años al que se le hace el test?
d) Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?

Resolución

Describimos los sucesos y sus probabilidades:
$D = "La\ persona\ elegida\ padece\ diabetes; p(D) = 0{,}138$; $p(\bar{D}) = 1 - 0{,}138 = 0{,}862$
$S = "La\ persona\ elegida\ sabe\ que\ padece\ diabetes"$

$$p(\bar{S}|D) = 0{,}43;\ p(S|D) = 1 - p(\bar{S}|D) = 0{,}57$$

a) $p(D \cap S) = \mathrm{p(D)} \cdot \mathrm{p}(S|D) = 0{,}138 \cdot 0{,}57 = 0{,}07866$

b) $p(\bar{D} \cup \bar{S}) \overset{Morgan}{\triangleq} p(\overline{D \cap S}) = 1 - p(D \cap S) = 1 - 0{,}07866 = 0{,}92134$

Sea el suceso $P =$ "*El test da positivo*" ; $p(P|D) = 0{,}96$; $p(P|\bar{D}) = 0{,}02$

c) $p(P) \overset{P.Total}{\triangleq} p(D) \cdot p(P|D) + p(\bar{D}) \cdot p(P|\bar{D}) = 0{,}138 \cdot 0{,}96 + 0{,}862 \cdot 0{,}02 = 0{,}14972$

d) $p(D|P) \overset{Bayes}{=} \frac{p(D)\cdot p(P|D)}{p(P)} = \frac{0{,}138\cdot 0{,}96}{0{,}14972} = \frac{0{,}13248}{0{,}14972} \cong 0{,}885$

4º) Las calificaciones de un examen de oposición a bombero de la Comunidad de Madrid siguen una distribución normal de media $\mu = 20$ puntos y desviación típica $\sigma = 10$ puntos. Calcula:

a) El porcentaje de opositores que obtienen una calificación entre 15 y 25 puntos.

b) La calificación que supera o iguala el 30% de los opositores.

c) El intervalo centrado en la media que recoge el 65% de las calificaciones.

d) Si se presentan 500 opositores para cubrir 75 plazas disponibles de bombero, ¿cuál es la nota mínima de acceso a esas plazas?

Resolución

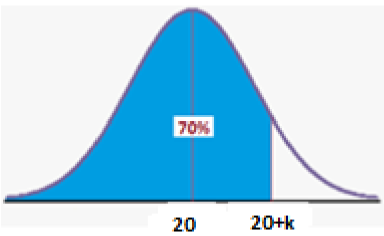
Sea la variable aleatoria $X =$ "*Calificaciones de los opositores*". $X \hookrightarrow N(20, 10)$; $Z \hookrightarrow N(0, 1)$

a) $p(15 \leq X \leq 25) = p\left(\frac{15-20}{10} \leq Z \leq \frac{25-20}{10}\right) = p(-0{,}5 \leq Z \leq 0{,}5) = p(Z \leq 0{,}5) - p(Z < -0{,}5)$

$= p(Z \leq 0{,}5) - p(Z > 0{,}5) = p(Z \leq 0{,}5) - [1 - p(Z \leq 0{,}5] = 2p(Z \leq 0{,}5) - 1 = 0{,}383$

El porcentaje de opositores que obtienen una calificación entre 15 y 25 puntos es del 38,3%

b) El 70% no llega a dicha calificación.

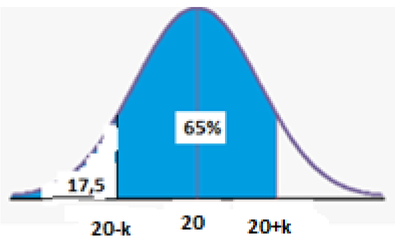


$p(X < 20 + k) = 0{,}7 \Leftrightarrow p\left(Z \leq \frac{k}{10}\right) = 0{,}7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{k}{10} = 0{,}525 \Leftrightarrow k = 5{,}25$

Así, $20 + k = 20 + 5{,}25 = 25{,}25$ es la calificación que supera o iguala el 30% de los opositores.

c)

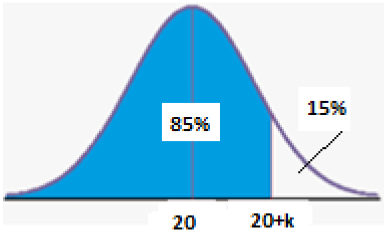


$p(X \leq 20 + k) = 0{,}825 \Leftrightarrow p\left(Z \leq \frac{k}{10}\right) = 0{,}825 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{k}{10} = 0{,}935 \Leftrightarrow k = 9{,}35$

El intervalo pedido es $(20 - 9{,}35, 20 + 9{,}35) = (10{,}65, 29{,}35)$

d) $\frac{75}{500} = 0{,}15$. Por tanto van a tener plaza de bombero el 15% de las mejores notas.



$$p(X \leq 20 + k) = 0{,}85 \Leftrightarrow p\left(Z \leq \frac{k}{10}\right) = 0{,}85 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{10} = 1{,}04 \Leftrightarrow k = 10{,}4$$

La nota mínima de acceso a las 75 plazas es $20 + k = 20 + 10{,}4 = 30{,}4\ puntos$

5º) Se sabe que el 8% de los análisis de comprobación de la cantidad de níquel en aleaciones de acero son erróneas.
Si se realizan 10 análisis:
a) ¿Se puede afirmar que el porcentaje de 3 o más análisis erróneos es menor del 3%?
b) ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 4 análisis sean erróneos?
Si se realizan 1000 análisis:
c) ¿cuál es la probabilidad de que el número de análisis erróneos esté entre 60 y 80?

Resolución

Sea el suceso $A = "Un\ análisis\ es\ erróneo"$; $p(A) = 0{,}08 = p$; $p(\bar{A}) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$
Sea la variable aleatoria discreta $X =$ Número análisis erróneos $= \{0, 1, 2, \dots, 10\}$
Se trata de una binomial $X \hookrightarrow B(10, 0'08)$; $n = 10$

a) $p(X \geq 3) = 1 - p(X < 3) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)] =$

$$= 1 - \left[\binom{10}{0} 0{,}92^{10} + \binom{10}{1} 0{,}08 \cdot 0{,}92^9 + \binom{10}{2} 0{,}08^2 \cdot 0{,}92^8\right] =$$

$$= 1 - [0{,}92^{10} + 10 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92^9 + 45 \cdot 0{,}08^2 \cdot 0{,}92^8] \cong 1 - 0{,}96 = 0{,}04$$

Por tanto, el porcentaje de 3 o más análisis erróneos es del 4%, no es menor del 3%.

La afirmación es falsa

b) $P(X = 4) = \binom{10}{4} 0{,}08^4 \cdot 0{,}92^6 = 210 \cdot 0{,}08^4 \cdot 0{,}92^6 = 0{,}00521562318$

c) $n = 1000$

Se trata de una binomial $X \hookrightarrow B(1000, 0'08)$

Como $np(1 - p) = 1000 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92 = 73{,}6 > 10$, la binomial se puede aproximar por una normal de media $1000 \cdot 0'08 = 80$ y desviación típica $\sqrt{1000 \cdot 0'08 \cdot 0'92} = \sqrt{73{,}6} \approx 8{,}58$

$$X \hookrightarrow (1000, 0'8) \hookrightarrow N(80, 8'58)$$

$$p(60 \leq X \leq 80) =^{Tificamos}= p\left(\frac{60 - 80}{8{,}58} \leq Z \leq \frac{80 - 80}{8{,}58}\right) = p(-2{,}33 \leq Z \leq 0) =$$

$$= p(Z \leq 0) - p(Z < -2{,}33) = p(Z \leq 0) - p(Z > 2{,}33) = p(Z \leq 0) - [1 - p(Z \leq 2{,}33)] =$$

$$0{,}5 - 1 + 0{,}9901 = 0{,}4901$$

Puntuación

1, 2, 3, 4 ------------ 2 puntos

5 -------------------- $\begin{cases} a), b) - - - 0{,}5\ puntos \\ c) - - - -\ 1\ puntos \end{cases}$