1º

Ejercicio 1: Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -mx + my + z = 0 \\ x - my + 3z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

a) Discutir según los valores del parámetro m.

$$A = \begin{pmatrix} -m & m & 1 \\ 1 & -m & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} -m & m & 1 & 0 \\ 1 & -m & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 \qquad \begin{vmatrix} -m & m & 1 \\ 1 & -m & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - 2 + 6m + 2m - 6m + m = 0$$

$$-m^2 + 3m - 2 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado: $m_1 = 2$ y $m_2 = 1$.

- Si $m \neq 2$ y $m \neq 1$ => rg(A)=rg(A^*) = nº de incógnitas => Sistema compatible determinado
- Si $m = 2$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(A): \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 2 = 8 \neq 0 \quad => r(A) = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} r(A^*): \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0 \\ \\ r(A^*): \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0 \end{array}\right\} => r(A^*) = 2$$

Como rg(A) = rg(A^*) < nº incógnitas => Sistema compatible indeterminado

- Si $m = 1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rg(A): \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4 \neq 0 \quad => r(A) = 2$$

$$rg(A^*): \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -8 + 4 = -4 \neq 0 \quad => rg(A^*) = 3$$

Como rg(A) ≠ rg(A^*) => Sistema incompatible

b) Resolver en caso de m=0.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z=0 \\ x+ 3z= 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} z=0 \\ x= 4 \\ 8 - 2y = 0 \,;\, y =4 \end{array}$$

Solución: (x, y, z) = (4, 4, 0)

c) Resolver en el caso m=2.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + 2y = -z \\ x - 2y = 4 - 3z \end{cases}$$

-x = -4 z + 4 => x = 4z – 4

-8z + 8 + 2y = -z => 2y = 7z – 8 => y = (7z – 8)/2

Solución: x= 4t -4 ; y = (7t – 8)/2 ; z= t

2º

Dada la función:

$$\begin{cases} a + x\ln(x) & x > 0 \\ x^2 e^x & x \leq 0 \end{cases}$$

a) Calcular el valor de a para que f(x) sea continua en todo $\mathbb{R}$.
b) Calcular f'(x) donde sea posible.
c) Calcular $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

Solución:

a) Analizamos la función en x=0 para que sea continua.

$$\lim_{x\to 0^+} a + x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} a + \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = a + [0\cdot(-\infty)] = a + \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)(L'H) =$$

$$= a + \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = a + \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{-x} = a + 0 = a$$

$$\lim_{x\to 0^-} x^2 e^x = 0\cdot e^0 = 0$$

$$f(0) = 0\cdot e^0 = 0$$

Para que sea continua: $\lim_{x\to 0^+} = \lim_{x\to 0^-} = f(0) \rightarrow a = 0$

b) Para calcular la derivada, hay que analizar la derivabilidad.

$$f'(x) = \begin{cases} \ln(x) + 1 & x > 0 \\ 2x\,e^x + x^2 e^x & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \infty$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0\,e^0 + 0e^0 = 0$$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-) \rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 0$

c) Hacemos la integral indefinida primero, que se resuelve por partes:

$$I = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$$

$$u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx$$

$$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$$

$$\int 2xe^x dx = 2xe^x - \int 2e^x dx = 2xe^x - 2e^x = 2e^x(x-1)$$

$$u = 2x \rightarrow du = 2\,dx$$

$$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$$

$$I = \left[x^2 e^x - [2e^x(x-1)]\right]_{-1}^{0} = [e^x(x^2 - 2x + 2)]_{-1}^{0} = e^0(2) - [e^{-1}((-1)^2 - 2(-1) + 2] = 2 - \frac{5}{e}$$

Ejercicio 3. Sean las funciones reales de variable real

$$f(x) = x^2 - 6x \qquad g(x) = x - 10$$

a) Represéntense gráficamente las funciones f y g.
b) Calcúlese el área del recinto plano acotado por las gráficas de las funciones f y g.

$$f(x) = x^2 - 6x$$

Vértice: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$ V (3,-9)

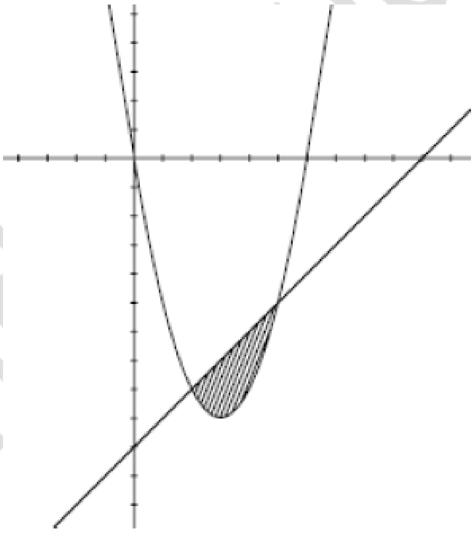
$y_v = 9 - 18 = -9$

Corte X: $y = 0 \rightarrow x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 6$

P_1 (0,0); P_2 (6,0)

- $g(x) = x - 10$

x	y
0	-10
10	0



c) Puntos de corte entre $f(x)$ y $g(x)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 6x \\ g(x) = x - 10 \end{array}\right\} \quad x^2 - 6x = x - 10 \rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \rightarrow x = 5, x = 2$$

Los puntos de corte delimitan el área para la integral definida.

$$A = \int_2^5 [(x-10) - (x^2 - 6x)]dx = \int_2^5 (-x^2 + 7x - 10)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 10x\right]_2^5 =$$

$$= \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{7\cdot 5^2}{2} - 10\cdot 5\right) - \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{7\cdot 2^2}{2} - 10\cdot 2\right) = -\frac{125}{3} + \frac{175}{2} - 50 + \frac{8}{3} - \frac{28}{2} + 20 = \mathbf{4,5u^2}$$

4º Dados los puntos P (−1, −1, 1), Q (1, 0, 2) y los planos:
$\pi_1 \equiv x - z = 0$
$\pi_2 \equiv my - 6z = 0$
$\pi_3 \equiv x + y - mz = 0$
Se pide: a) Calcular los valores de m para los que los tres planos se cortan en una recta (0,5 ptos)
b) Para m = 3, hallar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta de intersección de los planos π_1 y π_2. (0,5 puntos)
c) Hallar la distancia entre los puntos Q y P´, siendo P´ el punto simétrico de P respecto al plano π_1 (0,5 puntos)

Solución:

a) Si |A|=0 los tres planos se cortan en una recta.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -m^2 + m + 6 = 0$$

Para m=3 y m=-2 los tres planos se cortan en una recta.

b) Se hace el determinante con los vectores normales de los planos y el punto P.

$$\sigma = \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x + 2y + z + 2 = 0$$

c) Llamamos r a la recta perpendicular al plano, con $\overrightarrow{v_n}(1,0,-1)$, que pasa por P.

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

El punto medio M es la intersección de la recta r y el plano π_1:

$$(-1+t) - (1-t) = 0 \rightarrow t = 1 \rightarrow M(0,-1,0)$$

$$M = \frac{P + P'}{2} \begin{cases} 0 = \dfrac{-1+x}{2} \rightarrow x = 1 \\ -1 = \dfrac{-1+y}{2} \rightarrow y = -1 \\ 0 = \dfrac{1+z}{2} \rightarrow z = -1 \end{cases} \qquad P'(1,-1,-1)$$

$$\overrightarrow{QP'} = (1,0,2) - (1,-1,-1) = (0,1,3)$$

$$\left|\overrightarrow{QP'}\right| = \sqrt{0 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{10}\,u$$

5º

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8,8 meses y una desviación típica de 3 meses
a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?
b) (1 punto) Si se toma al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?
c) (0.5 puntos) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo (8.8 – c, 8.8 + c) incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98% de los individuos de esta especie?

Solución

a) T ="tiempo de vida (en meses) de un individuo de esta especie tomado al azar"∼ Normal$(\mu = 8.8, \sigma = 3)$. Con Z la distribución Normal$(0,1)$:

$$P(T > 10) = P(Z > 0.40) \approx 0.3446 \Rightarrow \text{Un } 34.46\ \% \text{ de los individuos.}$$

$$P(7 < T < 10) = P(-0.60 < Z < 0.40) \approx 0.6554 - 0.2743 = 0.3811 \Rightarrow \text{Un } 38.11\ \% \text{ de los individuos.}$$

b) Elegido al azar un individuo de esta especie $p = P(T \leq 10) \approx 0.6554$. Tomados 4 individuos al azar, sus tiempos de vida serán independientes y así la variable X que contabiliza cuántos de estos 4 no han superado los 10 meses de vida es una Binomial$(4, p = 0.6554)$. Se pide

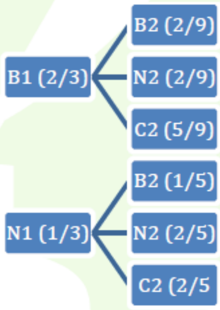
$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0.6554)^4 = 1 - 0.3446^4 \approx 0.985898637.$$

c) $P(8.8 - c \leq T \leq 8.8 + c) = 0.98 \Leftrightarrow P(0 \leq Z \leq \frac{c}{3}) = 0.49$. De la tabla de la Normal$(0,1)$ se tiene $\frac{c}{3} \approx 2.33$ y así $c \approx 6.99$ es el valor buscado.

6º

De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.
b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.
c) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.



a)

$$P(B_1 \cap N_2 \cup N_1 \cap B_2) = P(B_1).P(N_2|B_1) + P(N_1).P(B_2|N_1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5} = 0{,}2148$$

b)

$$P(B_1).P(N_2|B_1) + P(B_1).P(C_2|B_1) + P(N_1).P(B_2|N_1) + P(N_1).P(N_2|N_1) + P(N_1).P(C_2|N_1) = 0{,}851$$

c)

$$P(N_1|C_2) = P(N_1).P(B_2|N_1)/P(C_2) = 0{,}27$$
$$P(C_2) = P(N_1).P(C_2|N_1) + P(B_1).P(C_2|B_1) = 0{,}5037$$

7º Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3+4}{x^2-1}$$

a) Determine el dominio de f(x) ,calcule sus asíntotas y la monotonía de la función(0,75 ptos)
b) Calcule la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 0 , (0,75 puntos)

a) El dominio de f es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}$ para los cuales no se anula el denominador de $f(x)$: $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

- Asíntotas horizontales: no tiene.
- Asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = -1$
- Asíntotas oblicuas: $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+4}{x^3-x} = 1$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3+4}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3+4-x^3+x}{x^2-1}\right) = 0$$

La asíntotas oblicuas es: $y = mx + n = x$

b) $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2-1}$ y $f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1)-(x^3+4)2x}{(x^2-1)^2}$
$f(0) = -4$ y $f'(0) = 0$
Ecuación de la recta tangente: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$y + 4 = 0 \Rightarrow y = -4$$

Falta el estudio de la monotonia,