1º) Dada la función $f(x)=\frac{x-1}{e^x}$, se pide determinar:

a) Dominio y asíntotas.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

c) Curvatura y puntos de inflexión.

d) Esboza su gráfica.

e) Ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$.

Resolución

a) Numerador y denominador están definidos en $\mathbb{R}$ y $e^x \neq 0$. Por tanto $Dom(f)=\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-1}{e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}((-x-1)\cdot e^x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}L'Hop}{\cong}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}\overset{\frac{1}{+\infty}}{\cong}0$$

La recta $y=0$ *es asíntota horizontal en* $x\to+\infty$. No tiene oblicuas.

Asíntotas verticales no tiene porque $\lim_{x\to a}\frac{x-1}{e^x}=\frac{a-1}{e^a}\neq\infty$

b) Obtenemos la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{e^x-(x-1)e^x}{e^{2x}}=\frac{2-x}{e^x}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2-x=0\Leftrightarrow x=2$$

La recta real queda dividida en dos intervalos, $(-\infty,2)$ y $(2,+\infty)$

	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
Signo de $f'(x)$	$+$	$-$
f	Crece	Decrece

Obtenemos la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{-e^x-(2-x)e^x}{e^{2x}}=\frac{x-3}{e^x}$$

$f''(2)=\frac{-1}{e^2}<0 \Longrightarrow$ *Máximo relativo en el punto Q* $\left(2,\frac{1}{e^2}\right)$

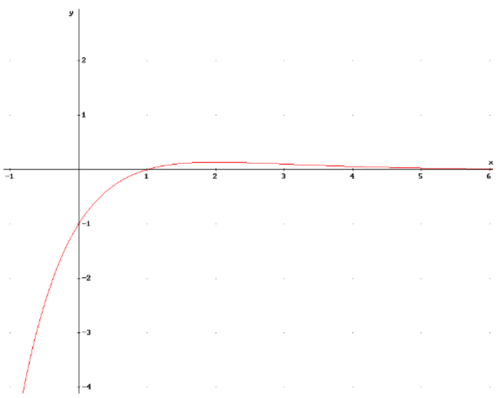
c) $f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-3}{e^x}=0\Leftrightarrow x-3=0\Leftrightarrow x=3$

La recta real queda dividida en dos intervalos, $(-\infty,3)$ y $(3,+\infty)$

	$(-\infty,3$	$(3,+\infty)$
Signo de $f''(x)$	$-$	$+$
f	Convexa	Cóncava

El cambio de curvatura en $x=3$ nos dicen que es punto de inflexión: $A\left(3,\frac{2}{e^3}\right)$

d)



e)

La recta tangente t en la abscisa $x=1$ es $t \equiv y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1)$;

$$f(1)=0 \ \ ; \ \ f'(1)=\frac{1}{e}$$

$$t \equiv y = \frac{1}{e}(x-1)\,; \ \ t \equiv y = \frac{x}{e}-\frac{1}{e}$$

2º) Utilizando los teoremas de Bolzano y Rolle, demuestra que las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=\frac{1}{x}$ se cortan en un único punto de abscisa positiva.

Resolución

Sea $h(x)=e^x-\frac{1}{x}$, función continua en $\mathbb{R}-\{0\}$, en particular en $\mathbb{R}^+$

$$\left.\begin{array}{r} h(x)\ continua\ en\ \left[\frac{1}{2},1\right] \\ h\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0 \\ h(1)=e-1>0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_1 \in \left(\frac{1}{2},1\right)\ tal\ que\ h(c_1)=0 \Leftrightarrow e^{c_1}-\frac{1}{c_1}=0 \ \Leftrightarrow e^{c_1}=\frac{1}{c_1}$$

Así, las gráficas de las funciones se cortan en el punto de abscisa positiva c_1 . Veamos que no se cortan en otro.

Supongamos que c_2 fuese la abscisa positiva de otro punto de corte entre ambas gráficas ($c_1<c_2$); así $e^{c_2}=\frac{1}{c_2}$, es decir, $h(c_2)=0$

Aplicando el teorema de Rolle a la función $h(x)$ en el intervalo (c_1,c_2) se tiene:

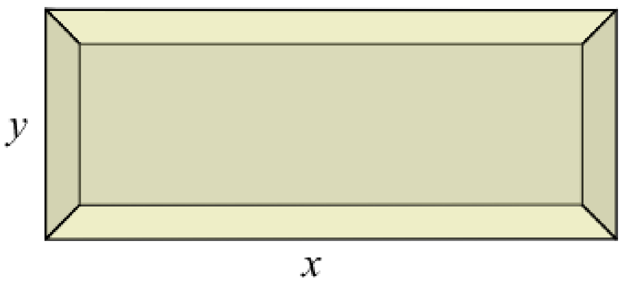
$$\left.\begin{array}{r} h(x)\ continua\ en\ [c_1,c_2] \\ h(x)\ derivable\ en\ (c_1,c_2) \\ 0=h(c_1)=h(c_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_1 \in (c_1,c_2)\ tal\ que\ h'(x_1)=0$$

es decir, encontramos un punto x_1 de derivada nula.

Sin embargo, $h'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}=0$ no tiene solución real puesto que $e^x+\frac{1}{x^2}>0\ \forall x\in\mathbb{R}^+$; esto contradice la existencia de un valor x_1 con derivada nula. La contradicción viene de suponer la existencia de c_2. Por tanto, las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=\frac{1}{x}$ se cortan en un único punto.

3º) Se quiere cortar una alfombra rectangular para un pasillo teniendo en cuenta que sus bordes se rematarán con dos tipos de cintas: una, que cuesta 32 € por metro**, se usará en los laterales, a lo largo del pasillo, u otra, con un precio de** 50€ por metro**, se empleará para los otros dos bordes. Calcula las dimensiones que debe tener una alfombra de** 1 metro cuadrado **de superficie para que el remate que la bordea sea lo más económico posible. Determina dicho coste.**

Resolución



$C = 32x + 50y$

$xy = 1;\ y = 1/x$

$C(x) = 32x + 50\,\frac{1}{x} = 32x + \frac{50}{x}$

$C'(x) = 32 - \frac{50}{x^2}\ ;\ C'(x) = 0 \Rightarrow 32 - \frac{50}{x^2} = 0\ ;\ x = \sqrt{\frac{50}{32}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}\ \text{m} = 1{,}25\ \text{m}$

$y = \frac{1}{x} = \frac{4}{5}\ \text{m} = 0{,}8\ \text{m}$

$\boxed{\text{La alfombra debe medir } 1{,}25 \times 0{,}80\ \text{m}}$

$C''(x) = \frac{100}{x^3}\ ;\ C''\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{100}{\left(\frac{5}{4}\right)^3} > 0 \Rightarrow \text{coste mínimo para } x = \frac{5}{4}$

$C = 2(32\times 1{,}25 + 50\times 0{,}8) = \mathbf{160\ €}$

4º) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+4)^{\frac{1}{Lx}}$

Resolución

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2+4)^{\frac{1}{Lx}} \overset{+\infty^0}{\triangleq}$$

$$L\left(\lim_{x\to+\infty} (x^2+4)^{\frac{1}{Lx}}\right) = \lim_{x\to+\infty} L\left((x^2+4)^{\frac{1}{Lx}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{Lx}\cdot L(x^2+4)\right) \overset{0.\infty}{\triangleq} \lim_{x\to+\infty} \frac{L(x^2+4)}{Lx} \overset{\frac{+\infty}{+\infty},L`Hôp}{\triangleq}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+4} = 2$$

Así, $L\left(\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+4)^{\frac{1}{Lx}}\right) = 2$, de donde $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+4)^{\frac{1}{Lx}} = e^2$

5º) Calcula:

a) $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln(x)\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^3-x^2-6}{x^2-x-2}\, dx$

Resolución

a)

Cálculo de una primitiva:

$$\int x^2 \ln(x)\, dx$$

Por partes: $\left\{\begin{array}{ll} u = \ln x & ;\ du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2dx & ;\ v = \int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 \end{array}\right\}$

$$\int x^2 \ln(x)\, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 = \frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) = \frac{1}{9}x^3(\ln x^3 - 1)$$

$$\int_1^e x^2 \ln(x)\, dx = \left[\frac{1}{9}x^3(\ln x^3 - 1)\right]_1^e = \frac{1}{9}\left(e^3(\ln e^3 - 1) - 1^3(\ln 1^3 - 1)\right) = \boxed{\frac{1}{9}(2e^3+1)}$$

b) $I = \int \frac{x^3-x^2-6}{x^2-x-2}\, dx = \int x\, dx + \int \frac{2x-6}{(x-2)(x+1)} dx = \frac{x^2}{2} + c_1 + I_1$ una vez efectuada la división del radicando al tratarse de una integral racional con integrando con grado del numerador mayor que el del denominador.

$I_1 = \int \frac{2x-6}{(x-2)(x+1)} dx$, se trata de una integral racional

Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{2x-6}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$2x-6 = A(x+1)+B(x-2)$$

Sustituyendo $x = 2$ y $x = -1$ obtenemos $\begin{cases} -2 = 3A \\ -8 = -3B \end{cases}$ de donde $A = \frac{-2}{3}$ y $B = \frac{8}{3}$

Así,

$$I_1 = \int \frac{2x-6}{(x-2)(x+1)} dx = \int \frac{-\frac{2}{3}}{x-2}\, dx + \int \frac{\frac{8}{3}}{x+1}\, dx = -\frac{2}{3}L|x-2| + \frac{8}{3}L|x+1| + c_2$$

$$I = \int \frac{x^3-x^2-6}{x^2-x-2}\, dxdx = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}L|x-2| + \frac{8}{3}L|x+1| + c$$

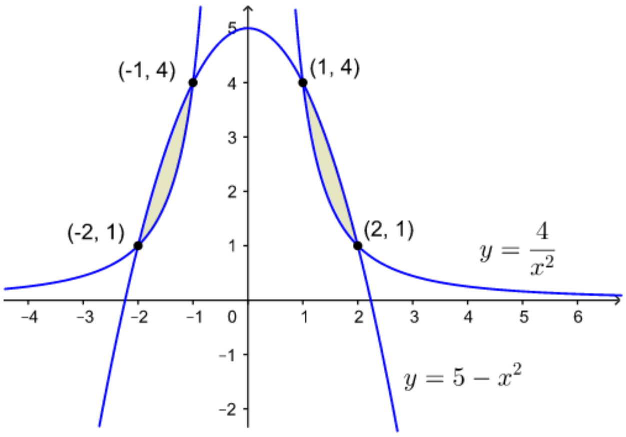
6º) Se consideran las funciones $f(x) = 5 - x^2$ y $g(x) = \frac{4}{x^2}$

a) Dibuja el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y halla los puntos de corte entre ellas.

b) Halla el área del recinto dibujado en el apartado anterior.

Resolución

a) $5 - x^2 = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Longrightarrow x = -2\,;\ x = -1\,; x = 1\,; x = 2$



b)

Las funciones presentan simetría par, por lo que las dos regiones tienen la misma superficie.

$$S = 2\int_1^2 (f(x) - g(x))\, dx = 2\int_1^2 \left(5 - x^2 - \frac{4}{x^2}\right) dx = 2\left[5x - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x}\right]_1^2 =$$

$$= 2\left(\frac{28}{3} - \frac{26}{3}\right) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{3}\ \text{u}^2}$$

Puntuación

1 -------------- 3 puntos

2, 3 ----------- 1,25 “

4 -------------- 0,5 “

5 -------------- 2 “

6 -------------- 2 “