1º) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y la función $f(x) = \begin{cases} 5 + 2sen(ax) & si\ x \leq 0 \\ ax^2 + bx + b & si\ x > 0 \end{cases}$

Determina los valores de a y b para que la función sea derivable en $x = 0$.

Resolución

En primer lugar, la función debe ser continua en $x = 0$:

1º) $f(0) = 5$

2º) $\lim_{x \to 0} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} (5 + 2sen(ax)) = 5 \\ \lim_{x \to 0^+} (ax^2 + bx + b\ ) = b \end{cases} \qquad b = 5$

$b = 5$. Calculamos la función derivada:

$$f(x) = \begin{cases} 5 + 2sen(ax) & si\ x \leq 0 \\ ax^2 + 5x + 5 & si\ x > 0 \end{cases} \quad ; \quad f'(x) = \begin{cases} 2acos(ax) & si\ x < 0 \\ 2ax + 5 & si\ x > 0 \end{cases}$$

Las derivadas laterales en $x = 0$ son $f'(0)^- = 2a\ \ y\ \ f'(0)^+ = 5$.

$$2a = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}$$

$$Por\ tanto, la\ función\ es\ derivable\ en\ x = 0\ para\ a = \frac{5}{2}\ \text{y}\ \ b = 5$$

2º) Halla el punto, si existe, que verifica el teorema del valor medio de Lagrange para la función $f(x) = x^3 - 3x$
en el intervalo $[-2, 0]$.

Resolución

La función es continua y derivable en el intervalo dado porque es polinómica.

$$\left.\begin{matrix} f(x)\ continua\ en\ [-2,0] \\ f(x)\ derivable\ en\ (-2,0) \end{matrix}\right\} \overset{T.Valor\ Medio}{\Longrightarrow} \exists x \in (-2,0)\ tal\ que\ f'(x) = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$El\ valor\ buscado\ en\ el\ intervalo\ (-2,0)\ es\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

3º) Calcula $\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

Resolución

a) $\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \overset{\infty^0}{\cong}$

$$ln\left(\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x\right) = \lim_{x \to 0^+} ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0^+} \left(x \cdot ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right) \overset{0\cdot\infty}{\cong} \lim_{x \to 0^+} \frac{ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\ } \overset{L`Hôp}{\cong} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x}{x+2} \cdot \frac{-2}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-2x}{x + 2} = 0$$

$$\text{Así, } ln\left(\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x\right) = 0\ \text{ y, por tanto, } \lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^0 = 1$$

4º) Demuestra que la ecuación $e^x + 2x = 0$ tiene exactamente una raíz real y calcúlala con una cifra decimal exacta.

Resolución

Sea $f(x) = e^x + 2x$, función continua en $\mathbb{R}$ por ser suma de continuas.

$$\left.\begin{matrix} f(x)\ continua\ en\ [-1,0] \\ f(-1) = \frac{1}{e} - 2 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{matrix}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_1 \in (-1,0)\ tal\ que\ f(c_1) = 0 \Leftrightarrow e^{c_1} + 2c_1 = 0$$

Así, c_1 es raíz de la ecuación $e^x + 2x = 0$. Veamos que no tiene más.
Supongamos que c_2 fuese otra raíz real de la ecuación con $c_1, < c_2$; así $e^{c_2} + 2c_2 = 0 = 0 \ y \ f(c_2) = 0$
Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo (c_1, c_2) se tiene:

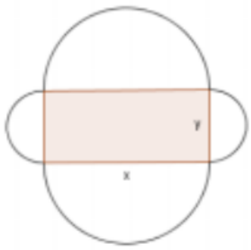
$$\left.\begin{array}{r} f(x) \ continua \ en \ [c_1, c_2] \\ f(x) \ derivable \ en \ (c_1, c_2) \\ 0 = f(c_1) = f(c_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_1 \in (c_1, c_2) \ tal \ que \ f'(x_1) = 0$$

es decir, encontramos un punto x_1 de derivada nula.
Sin embargo, $f'(x) = e^x + 2$ y $e^x + 2 = 0$ no tiene solución real puesto que $e^x + 2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$; esto contradice la existencia de un valor x_1 con derivada nula. La contradicción viene de suponer la existencia de una segunda raíz c_2. Por tanto, la ecuación tiene exactamente una raíz c_1 en el intervalo $(-1, 0)$.
La calculamos con una cifra decimal exacta. Para ello, dividimos en intervalo $(-1, 0)$ en diez partes iguales y evaluamos la función $f(x) = e^x + 2x$ en los extremos de cada subintervalo.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \ continua \ en \ [-0{,}4, -0{,}3] \\ f(-0{,}4) < 0 \\ f(-0{,}3) > 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \ \exists c_1 \in (-0{,}4, -0{,}3) \ tal \ que \ f(c_1) = 0 \Leftrightarrow e^{c_1} + 2c_1 = 0$$

$$Así, la \ única \ raíz \ real \ con \ una \ cifra \ decimal \ exacta \ es \ c_1 = -0{,}3 \ldots$$

5º) En un rectángulo de $4\,m$ de perímetro, se sustituyen los lados por semicircunferencias exteriores. Halla las dimensiones de los lados para que el área de la figura resultante sea mínima.



Resolución

Sean x, y las longitudes de los lados del rectángulo.
Es claro que $2x + 2y = 4$ es la restricción del problema.
El área de la figura es la del rectángulo más la de los dos círculos de radios $\frac{x}{2}$ e $\frac{y}{2}$

El planteamiento es: : $\left[\begin{array}{lll} minimizar \ \ A(x,y) = x \cdot y + \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 & función \ objetivo \\ \qquad s.a \qquad x + y = 2 & restricción \end{array}\right.$

Despejando y de la restricción, $y = 2 - x$. Sustituyendo en la función objetivo:

$$A(x) = x \cdot (2 - x) + \pi\frac{x^2}{4} + \pi\frac{(2-x)^2}{4} = 2x - x^2 + \pi\frac{2x^2 - 4x + 4}{4} \quad minimizar$$

Derivando, $A'(x) = 2 - 2x + \frac{\pi}{2}(2x - 2)$; $A'(x) = 0 \Leftrightarrow (\pi - 2)x = \pi - 2 \Leftrightarrow x = 1$

$A''(x) = -2 + \pi$ y A''(1)= $\pi - 2$ >0. Por tanto, hemos encontrado el mínimo de la función A.
Las dimensiones de los lados del rectángulo que minimizan su área son:

$$x = 1m \ \ e \ \ y = 1m \ \ Se \ trata \ de \ un \ cuadrado \ de \ lado \ 1m$$

6º) Dada la función $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$, se pide determinar:

a) Dominio y asíntotas.

b) Ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$.

Resolución

a) Numerador y denominador están definidos en $\mathbb{R}$ y $e^x \neq 0$. Por tanto $Dom(f) = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(-x+1)^2}{e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} ((1-x)^2 \cdot e^x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty} L'Hop}{\cong} \lim_{x\to+\infty} \frac{2(x+1)}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty} L'Hop}{\cong} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} \overset{\frac{2}{+\infty}}{\cong} 0$$

La recta $y = 0$ *es asíntota horizontal en* $x \to +\infty$. No tiene oblicuas.
Asíntotas verticales no tiene porque $\lim_{x\to a} \frac{(x+1)^2}{e^x} = \frac{(a+1)^2}{e^a} \neq \infty$

b)

La recta tangente t en la abscisa $x = 0$ es $t \equiv y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$;

$$f(0) = 1 \quad ; \quad f'(0) = 1$$

$$t \equiv y - 1 = x \;\; ; \;\; t \equiv y = x + 1$$

7º) Dada la función $f(x) = \frac{x^2-5}{2x-4}$, se pide:

a) Dominio, asíntotas, monotonía y curvatura.
b) Esboza la gráfica de la función.

Resolución

a) $2x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2 \; Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5}{2x-4} \overset{\frac{-1}{0}}{\cong} \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-5}{2x-4} \overset{\frac{-1}{0^-}}{\cong} +\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-5}{2x-4} \overset{\frac{-1}{0^+}}{\cong} -\infty \end{cases}$$ La recta $x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal no tiene porque $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-5}{2x-4} = \pm\infty$

Asíntota oblicua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2-5}{2x-4}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-5}{2x^2-4x} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-5}{2x-4} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x-10}{4x-8} = 1$$

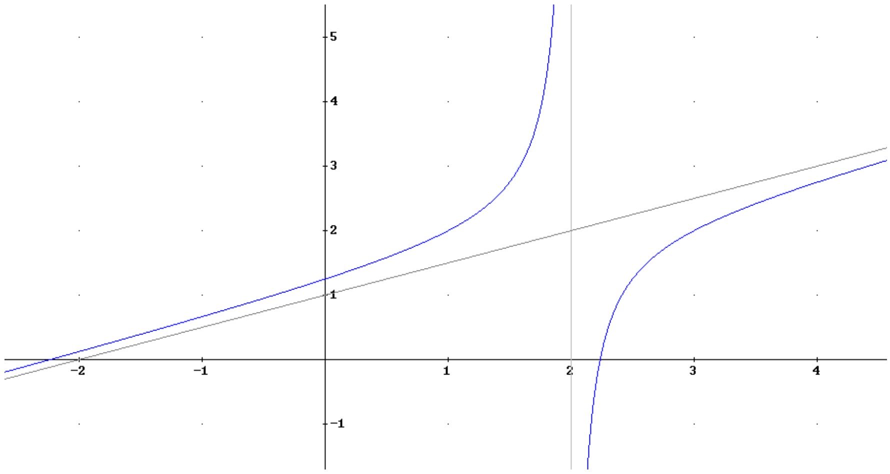
La recta $y = \frac{x}{2} + 1$ es asíntota oblicua

Monotonía: $f'(x) = \frac{2x\cdot(2x-4)-2\cdot(x^2-5)}{(2x-4)^2} = \frac{2x^2-8x+10}{(2x-4)^2} > 0$ en su dominio. La función es creciente en su dominio.

Curvatura: $f''(x) = \frac{(4x-8)\cdot(2x-4)^2-(2x^2-8x+10)\cdot 4\cdot(2x-4)}{(2x-4)^4} = \frac{-8}{(2x-4)^3}$

$$f''(x) = \frac{-8}{(2x-4)^3} \begin{cases} < 0 \Leftrightarrow 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2. (2, +\infty) \; f \; Convexa \\ > 0 \Leftrightarrow 2x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 2. (-\infty, 2) \; f \; Cóncava \end{cases}$$

b)



Puntuación

1, 2, 3, 4 --------- 1 punto
5 ----------------- 1,5 “
6 ----------------- 2 “
7 ----------------- 2,5 “