1º) Calcula una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=\frac{2}{3\sqrt{2x-3}}$ tal que $F(2)=-1$

Resolución

La primitiva que buscamos estará en su integral indefinida, que es racional:

$$F(x)=\int\frac{2}{3\sqrt{2x-3}}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{2}{\sqrt{2x-3}}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{2x-3}+c$$

$$F(2)=-1\Leftrightarrow\frac{2}{3}+c=-1\Leftrightarrow c=-\frac{5}{3}$$

$$\text{La primitiva es } F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{2x-3}-\frac{5}{3}=\frac{2\sqrt{2x-3}-5}{3}$$

2º) Calcula $\int_0^1\frac{e^{2x}+5}{3}\,dx$

Resolución

$$\int_0^1\frac{e^{2x}+5}{3}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^1 e^{2x}\,dx+\int_0^1\frac{5}{3}\,dx=\frac{1}{6}\left[e^{2x}\right]_0^1+\frac{5}{3}[x]_0^1=\frac{1}{6}(e^2-1)+\frac{5}{3}=\frac{e^2+9}{6}$$

3º) Calcula las siguientes integrales:

Resolución

a) $\int\frac{2-x}{1+x^2}\,dx=2\int\frac{1}{1+x^2}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx=2arctgx-\frac{1}{2}L|1+x^2|+c$

b) $\int\frac{3x+2}{3x-1}\,dx=\int\frac{3x-1+3}{3x-1}\,dx=\int\frac{3x-1}{3x-1}\,dx+\int\frac{3}{3x-1}\,dx=x+L|3x-1|+c$

c) $\int\frac{3senx}{5(2+3cosx)^3}\,dx=\int\frac{(2+3cosx)^{-3}}{5}\cdot 3senx\,dx=-\int\frac{(2+3cosx)^{-3}}{5}\cdot(-3senx)\,dx=-\frac{1}{5}\frac{(2-3cosx)^{-2}}{-2}+c=$

$=\frac{1}{10(2-3cosx)^2}+c$

d) $\int\frac{x^2+4}{(x-2)^2\cdot(x+2)}\,dx$

Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{x^2+4}{(x-2)^2\cdot(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+2}=\frac{A(x-2)(x+2)+B(x+2)+C(x-2)^2}{(x-2)^2\cdot(x+2)}$$

$$x^2+4=A(x-2)(x+2)+B(x+2)+C(x-2)^2$$

Sustituyendo $x=2$; $x=-2$ y $x=0$ obtenemos $\left\{\begin{array}{c}8=4B\\8=16C\\4=-4A+2B+4C\end{array}\right.$ de donde

$$A=1/2\ ;\ B=2\ ;C=1/2$$

Por tanto:

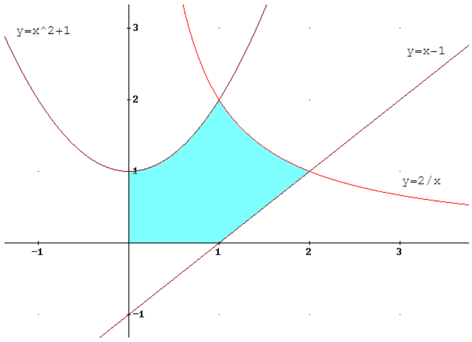
$$\int\frac{x^2+4}{(x-2)^2\cdot(x+2)}\,dx=\int\frac{1/2}{x-2}\,dx+2\int(x-2)^{-2}\,dx+\int\frac{1/2}{x+2}\,dx=\frac{1}{2}L|x-2|-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{2}L|x+2|+c$$

e) $\int x\cdot sen(2x)\,dx=\frac{-x\cos(2x)}{2}+\frac{1}{2}\int\cos(2x)\,dx=\frac{-x\cos(2x)}{2}+\frac{sen(2x)}{4}+c$

$$\begin{array}{c}u=x\\dv=sen(2x)\,dx\end{array}\Rightarrow\begin{array}{c}du=dx\\v=\int dv=\int sen(2x)\,dx=\frac{-\cos(2x)}{2}\end{array}$$

4º) Dibuja el recinto finito limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las gráficas de las funciones $y = \frac{2}{x}$, $y = x^2 + 1$, e $y = x - 1$. Calcula su área.

Resolución



Cortes entre las funciones:

$$\frac{2}{x} = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

$$\frac{2}{x} = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

$$x^2 + 1 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0 \quad No\ tiene\ solución\ real$$

El área es:

$$A_1 = \int_0^1 (x^2 + 1))\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}\ u^2$$

$$A_2 = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - x + 1\right)\, dx = \left[2L|x| - \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = 2L2 - \frac{1}{2}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + 2L2 - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + 2L2 \cong 2{,}22\ u^2$$

Puntuación

1, 2 -------------- 1,25 puntos
3 ------------------ 5 “
4 ------------------ 2,5 “