1º) Resuelve la ecuación $A \cdot X = X - B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Resolución

$$A \cdot X = X - B \Leftrightarrow A \cdot X - X = -B \Leftrightarrow (A - I) \cdot X = -B \overset{Sea\ P=A-I}{\Leftrightarrow} P \cdot X = -B$$
$$\Leftrightarrow P^{-1} \cdot P \cdot X = -P^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = -P^{-1} \cdot B$$

$$P = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P^{-1}:

Como $|P| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{Desarrollo\ por\ 2ª\ Col}{\triangleq} -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, existe P^{-1}

$P_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$; $P_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$; $P_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

$P_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$; $P_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$; $P_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$P_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$; $P_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $P_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$

Matriz adjunta de P: $Adj(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz inversa de P: $P^{-1} = \frac{1}{|P|} \cdot (Adj(P))^t = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$X = -P^{-1} \cdot B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

2º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ se pide:

a) Determina los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales se cumple $A^3 - I = O$ siendo I matriz unidad y O matriz nula.

b) Calcula A^{12} para los valores de x que verifican la condición anterior.

c) Para $x = 0$ y sabiendo que ese valor cumple la condición del primer apartado, demuestra que existe la inversa de la matriz A y exprésala en función de A.

Resolución

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -2x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -2x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3+1 & -2x & -3x^2 \\ -x^2 & 1 & 2x \\ -2x & x^2 & x^3+1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - I = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^3+1 & -2x & -3x^2 \\ -x^2 & 1 & 2x \\ -2x & x^2 & x^3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+1 = 1 \Leftrightarrow x^3 = 0 \\ -2x = 0 \\ -3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \text{con solución } x = 0$$

b) Para $x = 0$ se tiene que $A^3 - I = O$, es decir, $A^3 = I$ y, por tanto, $A^{12} = (A^3)^4 = I^4 = I$

c) Para $x = 0$ se tiene que $A^3 - I = O$.

$$A^3 - I = O \Leftrightarrow A^3 = I \Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot A^2 = I \\ A^2 \cdot A = I \end{cases} \text{Por tanto } A^{-1} = A^2$$

3º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ **se pide**:

a) Halla los valores de a para los que el sistema homogéneo $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **tenga soluciones distintas de la trivial**.

b) Sea la matriz $B = \frac{2}{3} A \cdot D \cdot A^{-1}$ para $a = 0$. **Calcula** $|2B|$

Resolución

a) El sistema homogéneo tiene soluciones distintas de la trivial, infinitas, si y solo si $rg(A) < 3$. Por tanto $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^3 + 1 - 3a = a^3 - 3a + 2$$

$$|A| = 0 \overset{Ruffini}{\Leftrightarrow} m = -2 \ \ y\ m = 1 \ que\ son\ los\ valores\ buscados$$

b) Para $a = 0$ se tiene que $|A| = 2 \neq 0$ y, por tanto, tanto existe A^{-1}. Además, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

$$|2B| \overset{B\ es\ de\ orden\ 3}{=} 2^3|B| = 8\left|\frac{2}{3} A \cdot D \cdot A^{-1}\right| = 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 |A| \cdot |D| \frac{1}{|A|} = \frac{64}{27} \cdot (-27) = -64$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -27$$

4º) En un grupo hay 288 **personas de entre** 18 **y** 25 **años clasificados como estudiantes, empleados y sin ocupación. Por cada** 5 **estudiantes hay** 3 **empleados y los sin ocupación representan el** 80% **del resto.**

Plantea el correspondiente sistema de ecuaciones y determina cuántos estudiantes, empleados y sin ocupación hay.

Resolución

Sean x, y, z el número de estudiantes, empleados y sin ocupación respectivamente.

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 288 \\ \frac{x}{5} = \frac{y}{3} \\ z = 0{,}8 \cdot (x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 288 \\ 3x - 5y = 0 \\ 4x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 288 \\ 3 & -5 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 288 \\ 0 & -8 & -3 & -864 \\ 0 & 0 & -9 & -1152 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 288 \\ -8y - 3z = -864 \\ -9z = -1152 \end{cases} \quad de\ donde\ z = 128\ €\ ; y = 60\ €\ ; x = 100\ €$$

5º) Se considera el sistema $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+(1+m)y-mz=2m \\ x+my+(1+m)z=1 \end{cases}$

a) Discútase según los valores del parámetro real m**.**
b) Resuélvase cuando sea compatible indeterminado.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+m & -m \\ 1 & m & 1+m \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+m & -m & 2m \\ 1 & m & 1+m & 1 \end{pmatrix}$

$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+m & -m \\ 1 & m & 1+m \end{vmatrix} \overset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}}{\cong} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & m-2 & m+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-1 & 1-m \\ m-2 & m+2 \end{vmatrix} =$$

$$(m-1)(m+2)+(m-1)(m-2)=(m-1)(m+2+m-2)=2m(m-1)$$

$|A|=0 \iff 2m(m-1)=0 \iff \begin{cases} m=0 \\ m=1 \end{cases}$

Caso 1 $\forall m \in \mathbb{R}-\{0,1\}$ $|A|\neq 0$. Por tanto $rg(A)=3=rg(A^*)=nº\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $m=0$. En este caso $|A|=0\ y\ rg(A)<3$

Matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A)=2$, $rg(A^*)\geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3\neq 0$; Por tanto $rg(A^*)=3$

$$2=rg(A)\neq rg(A^*)=3 \quad \text{Sistema Incompatible (No tiene solución)}$$

Caso 3 $m=1$. En este caso $|A|=0\ y\ rg(A)<3$

Matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A)=2$, $rg(A^*)\geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la primera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{F1=F2}{\cong} 0$; Por tanto $rg(A^*)=2$

$$rg(A)=rg(A^*)=2<nº\ incógnitas\text{: Sistema Compatible Indeterminado.}$$

b) Resolvemos caso 3 $m=1$

Observando el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$z = t$; $\begin{cases} x + 2y = 2 + t \\ x + y = 1 - 2t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, de donde $y = 1 + 3t$; $x = -5t$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = -5t \\ y = 1 + 3t \\ z = t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Puntuación
1, 3 --------------- 1,5 puntos
2 ----------- a) y b) 0,75. c) 1 punto
4 ------------------ 2 puntos
5 ------------------ 2,5 “