# Matemáticas II ** Matrices-Determinantes-Sistemas ** Nv-23

**1º) Resuelve la ecuación** $X \cdot A + B = 2X + I$ **siendo** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ***y*** $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

**Resolución**

$$X \cdot A + B = 2X + I \Leftrightarrow X \cdot A - X \cdot 2I = I - B \Leftrightarrow X \cdot (A - 2I) = I - B \overset{Sea\ P=A-2I}{\Leftrightarrow} X \cdot P = I - B$$

$$\Leftrightarrow X \cdot P \cdot P^{-1} = (I - B) \cdot P^{-1} \Leftrightarrow X = (I - B) \cdot P^{-1}$$

$$P = A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $P^{-1}$:

Como $|P| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{Desarrollo\ por\ 2^a\ Fila}{\triangleq} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, existe $P^{-1}$

$P_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ; $P_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$ ; $P_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$P_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ ; $P_{22} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$ ; $P_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$P_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ ; $P_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ ; $P_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Matriz adjunta de $P$: $Adj(P) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz inversa de $P$: $P^{-1} = \frac{1}{|P|} \cdot (Adj(P))^t = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$I - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\boldsymbol{X} = (I - B) \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

**2º) Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x-1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$ **se pide:**

**a) Determina los valores de** $x \in \mathbb{R}$ **para los cuales la matriz** $A$ **tiene inversa.**

**b) Para** $x = 1$**, halla** $(A \cdot B^t)^3$ ***y*** $(A \cdot B^t)^{2023}$

**Resolución**

a) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x-1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{Desarrollo\ por\ 2^a\ columna}{\triangleq} - \begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ x+1 & 3 \end{vmatrix} = x^2 - 4$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b)

c) $A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1 & 2/3 \\ -1/3 & 0 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(A \cdot B^t)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$(A \cdot B^t)^3 = (A \cdot B^t)^2 \cdot A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

$(A \cdot B^t)^4 = (A \cdot B^t)^3 \cdot A \cdot B^t = -I \cdot A \cdot B^t = -A \cdot B^t$

$(A \cdot B^t)^5 = (A \cdot B^t)^4 \cdot A \cdot B^t = -(A \cdot B^t)^2$

$(A \cdot B^t)^6 = (A \cdot B^t)^3 \cdot (A \cdot B^t)^3 = (-I) \cdot (-I) = I^2 = I$

………

Las sucesivas potencias de $A \cdot B^t$ son: $A \cdot B^t, (A \cdot B^t)^2, -I, -A \cdot B^t, -(A \cdot B^t)^2, I, \dots$..

Se repiten en bloques de 6 potencias. Así,

$$(A \cdot B^t)^{2023} = (A \cdot B^t)^{6 \cdot 337+1} = (A \cdot B^t)^{6 \cdot 337} \cdot (A \cdot B^t) = [(A \cdot B^t)^6]^{337} \cdot (A \cdot B^t) = I^{337} \cdot (A \cdot B^t)$$
$$= (A \cdot B^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**3º) Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ **se pide**:

**a) Halla el valor de** $m$ **para que el sistema homogéneo** $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **tenga soluciones distintas de la trivial**.

**b) Sea la matriz** $B = A \cdot D \cdot A^{-1}$ para $m = 0$. **Calcula** $|B^2|$

**Resolución**

a) El sistema homogéneo tiene soluciones distintas de la trivial, infinitas, si y solo si $rg(A) < 3$. Por tanto $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 2-m & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2m - 7$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow 2m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{2}$$

b) Para $m = 0$ se tiene que $|A| = -7 \neq 0$ y, por tanto, tanto existe $A^{-1}$.

$$B^2 = A \cdot D \cdot A^{-1} \cdot A \cdot D \cdot A^{-1} = A \cdot D^2 \cdot A^{-1}$$

$$|B^2| = |A \cdot D^2 \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |D^2| \cdot |A^{-1}| = |A| \cdot |D|^2 \cdot \frac{1}{|A|} = |D|^2 \overset{D\ es\ diagonal}{\cong} (-7)^2 = 49$$

$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -7$

**4º) Una empresa fabrica latas de macedonia de frutas (melocotón, pera y piña) de** 1 $kg$. **Las latas contienen** 750 gramos **de fruta y el resto es agua y azúcar. Si la empresa utiliza la misma cantidad de las tres frutas, el coste en fruta por lata para la empresa es de** 1,8 euros **y, si utiliza** 0,25 kg **de melocotón y** 100 gramos **más de piña que de pera, el coste en fruta por lata es de** 1,9 euros**. Si la**

**empresa paga** 18000 euros **por un lote compuesto de** 3000 kg **de melocotón,** 3000 kg **de pera y** 2000 kg **de piña, calcula el coste para la empresa de cada** kg **de melocotón, pera y piña.**

**Resolución**

Sean (x, y, z) el precio en euros/kg de (melocotón, pera y piña)

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} 0{,}25x + 0{,}25y + 0{,}25z = 1{,}8 \\ 0{,}25x + 0{,}2y + 0{,}3z = 1{,}9 \\ 3000x + 3000y + 2000z = 18000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 7{,}2 \\ 5x + 4y + 6z = 38 \\ 3x + 3y + 2z = 18 \end{cases}$$

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7{,}2 \\ 5 & 4 & 6 & 38 \\ 3 & 3 & 2 & 18 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7{,}2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3{,}6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 7{,}2 \\ -y + z = 2 \\ -z = -3{,}6 \end{cases} \qquad de\ donde\ z = 3{,}6\ €;\ y = 1{,}6\ €\ ;\ x = 2\ €$$

**5º) Se considera el sistema** $\begin{cases} 2x + my \quad + z = m \\ x - 4y + (m+1)z = 1 \\ 4y - mz = 0 \end{cases}$

**a) Discútase según los valores del parámetro real** $m$**.**

**b) Resuélvase cuando sea compatible indeterminado.**

**Resolución**

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 2 & m & 1 \\ 1 & -4 & m+1 \\ 0 & 4 & -m \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^* = \begin{pmatrix} 2 & m & 1 & m \\ 1 & -4 & m+1 & 1 \\ 0 & 4 & -m & 0 \end{pmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ 1 & -4 & m+1 \\ 0 & 4 & -m \end{vmatrix} \overset{F_1 - 2F_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & m+8 & -2m-1 \\ 1 & -4 & m+1 \\ 0 & 4 & -m \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} m+8 & -2m-1 \\ 4 & -m \end{vmatrix} = m^2 - 4$$

$|A| = 0 \iff m^2 - 4 = 0 \iff m = \pm 2$

**Caso 1** $\forall m \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ $|A| \neq 0$ . Por tanto $rg(A) = 3 = rg(A^*) = nº\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

**Caso 2** $m = -2$. En este caso $|A| = 0\ \ y\ \ rg(A) < 3$

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz $A$:

Como $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ , en $A$ hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$ , $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada $A^*$:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ , que nos ha dado el rango de A, con la primera fila y cuarta columna de $A^*$ :

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \qquad ; \qquad \text{Por tanto } rg(A^*) = 3$$

$$2 = rg(A) \neq rg(A^*) = 3 \quad \text{Sistema Incompatible (No tiene solución)}$$

**Caso 3** $m = 2$. En este caso $|A| = 0\ \ y\ \ rg(A) < 3$

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz $A$:

Como $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ , en $A$ hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$ , $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada $A^*$:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la primera fila y cuarta columna de $A^*$ :

$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ; Por tanto $rg(A^*) = 2$

$$rg(A) = rg(A^*) = 2 < nº\ incógnitas:$$ Sistema Compatible Indeterminado.

b) Resolvemos **caso 3** $m = 2$

Observando el menor $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz $A$, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} x - 4y + 3z = 1 \\ \quad\ \ 4y - 2z = 0 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz $A$, es decir $x$ e y. La incógnita $z$ actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$z = t$; $\begin{cases} x - 4y = 1 - 3t \\ \quad\ \ 4y = 2t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, de donde $y = \frac{1}{2}t$ ; $x = 1 - t$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$