A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El $10\,\%$ de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuanta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

Resolución

$x =$ "*número de camiones tipo A*"
$y =$ "*número de camiones tipo B*"
$z =$ "*número de camiones tipo C*"

Del enunciado, obtenemos: $\begin{cases} x+1 = y+z \\ 0{,}1 \cdot 24y = \frac{28z}{7} \\ 14x+24y+28z = 302 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3y-5z=0 \\ 7x+12y+14z=151 \end{cases}$

Resolviendo el sistema por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 7 & 12 & 14 & 151 \end{pmatrix} \underset{F_3-7F_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 19 & 21 & 158 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{3}F_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -5/3 & 0 \\ 0 & 19 & 21 & 158 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\longleftrightarrow}{F_3-19\,F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 158/3 & 158 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=-1 \\ y-\frac{5}{3}z=0 \\ \frac{158}{3}z=158 \end{cases} \text{ de donde } z=3\ ;\ y=5\ ;\ x=7$$

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, se pide:

a) (0.25 puntos) Estudiar si es par o impar.

b) (0.75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$.

c) (1.5 puntos) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

Resolución

a) Comprobamos si $f(-x) = f(x)$:

$f(-x) = \sqrt[3]{((-x)^2-1)^2} = \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = f(x)$ La función es par.

b) $f(x) \geq 0$ y continua en el conjunto de los números reales por ser composición de continuas.

$f(x) = (x^2-1)^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{2}{3}-1} \cdot 2x = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$

La derivada no está definida en $x = 1$. La función no es derivable en $x = 1$.

c)

$f'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}} \begin{cases} f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \\ Polos: x^2-1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

Estos valores dividen la recta real en intervalos, en cada uno de los cuales vamos a determinar el signo de la derivada f' sustituyendo en ella un valor cualquiera de cada uno de ellos:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
Signo de $f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$$f(x) \text{ decrece en el intervalo } (-\infty,-1)\cup(0,1)$$
$$f(x) \text{ crece en el intervalo } (-1,0)\cup(1,+\infty)$$

Por tanto, los puntos $P(-1,0)$ y $Q(1,0)$ son mínimos absolutos y el punto $R(0,1)$ es máximo relativo ya que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los puntos $A(1,-2,3)$, $B(0,2,-1)$ y $C(2,1,0)$. Se pide:

a) (1.25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.

b) (0.75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z = 1$.

c) (0.5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo T.

Resolución

a) Comprobamos que los tres puntos no están alineados.

$$\overrightarrow{AB} = (-1,4,-4)\,;\ \ \overrightarrow{AC} = (1,3,-3)$$

Estudio el rango de esos vectores. $rg\begin{pmatrix}-1 & 4 & -4\\ 1 & 3 & -3\end{pmatrix} = 2$ ya que $\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix} = -7 \neq 0$

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen distinta dirección y, por tanto, los puntos dados determinan un triángulo.

El plano que determinan es $\pi\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix}x-1 & y+2 & z-3\\ -1 & 4 & -4\\ 1 & 3 & -3\end{vmatrix} = 0$

Desarrollando el determinante, $\pi \equiv -7y - 14 - 7(z-3) = 0\ ;\ \pi \equiv y + z - 1 = 0$

b) Recta que pasa por los puntos A y B: $r \equiv \begin{cases}x = 1 - t\\ y = -2 + 4t\\ z = 3 - 4t\end{cases}$

Intersección recta y plano:

$\begin{cases}x = 1 - t\\ y = -2 + 4t\\ z = 3 - 4t\\ \quad z = 1\end{cases} \Leftrightarrow 3 - 4t = 1 \Leftrightarrow t = 1/2$. El punto es $P\left(\frac{1}{2},0,1\right)$.

c) El perímetro del triángulo es la suma de las longitudes de sus lados:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{33}\ ;\ \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{19}\ ;\ \overrightarrow{BC} = (2,-1,1)\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{6}$

$$Perímetro = \sqrt{33} + \sqrt{19} + \sqrt{6}\ unidades$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tiene un suceso A de probabilidad $P(A) = 0.3$.

a) (0.75 puntos) Un suceso B de probabilidad $P(B) = 0.5$ es independiente de A. Calcule $P(A\cup B)$.

b) (0.75 puntos) Otro suceso C cumple $P(C\,|\,A) = 0.5$. Determine $P(A\cap\overline{C})$.

c) (1 punto) Si se tiene un suceso D tal que $P(\overline{A}\,|\,D) = 0.2$ y $P(D\,|\,A) = 0.5$, calcule $P(D)$.

Resolución

a) $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) \overset{A\ y\ B\ ind}{\cong} p(A) + p(B) - p(A)\cdot p(B) = 0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}3\cdot 0{,}5 = 0{,}65$

b) $p(C|A) = 0{,}5$

$$p(A\cap\bar{C}) = p(A)\cdot p(\bar{C}|A) = p(A)\cdot\left(1 - p(C|A)\right) = 0{,}5\cdot(1 - 0{,}5) = 0{,}25$$

c) $p(D|A) = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{p(A\cap D)}{p(A)} = 0{,}5 \Longrightarrow p(A\cap D) = 0{,}5\cdot p(A) = 0{,}5\cdot 0{,}3 = 0{,}15$

$p(\bar{A}|D) = 0{,}2 \Leftrightarrow \frac{p(\bar{A}\cap D)}{p(D)} = 0{,}2 \ \ \Longrightarrow p(D\cap\bar{A}) = 0{,}2\cdot p(D) \Longrightarrow p(D) - p(A\cap D) = 0{,}2\cdot p(D) \Longrightarrow$

$$p(D) - 0{,}15 = 0{,}2\cdot p(D) \Longrightarrow 0{,}8\cdot p(D) = 0{,}15 \Longrightarrow p(D) = \frac{15}{80} = \frac{3}{16} = 0{,}1875$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema $\left\{\begin{array}{lllll}(a+1)x & + & 4y & & =0 \\ & & (a-1)y & + & z & =3 \\ 4x & + & 2ay & + & z & =3\end{array}\right.$, se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a.

b) (0.5 puntos) Resolverlo para $a=3$.

c) (0.75 puntos) Resolverlo para $a=5$.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A=\begin{pmatrix} a+1 & 4 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 4 & 2a & 1 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^*=\begin{pmatrix} a+1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 3 \\ 4 & 2a & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a+1 & 4 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 4 & 2a & 1 \end{vmatrix} \underset{}{\overset{F_2-F_3}{=}} \begin{vmatrix} a+1 & 4 & 0 \\ -4 & -1-a & 0 \\ 4 & 2a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & 4 \\ -4 & -(1+a) \end{vmatrix} = -(a+1)^2+16$$

$|A|=0 \iff (a+1)^2=16 \iff \left\{\begin{array}{l} a=3 \\ a=-5 \end{array}\right.$

Caso 1 $\forall a \in \mathbb{R}-\{-5,3\}$ $|A|\neq 0$. Por tanto $rg(A)=3=rg(A^*)=n^{o}\ incógnitas$

$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$

Caso 2 $a=-5$. En este caso $|A|=0$ y $rg(A)<3$.

Matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 4 & -10 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \\ 4 & -10 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}=24\neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A)=2$, $rg(A^*)\geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$$\begin{vmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \\ 4 & -10 & 3 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{F_2-F_1=F3} 0 \quad ; \quad \text{Por tanto } rg(A^*)=2$$

$rg(A)=rg(A^*)=2<n^{o}\ incógnitas$ Sistema compatible indeterminado.

También podíamos ver que la cuarta columna de A^* es combinación lineal de la tercera, con lo que $rg(A)=rg(A^*)$.

Caso 3 $a=3$. En este caso $|A|=0$ y $rg(A)<3$.

Matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=8\neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A)=2$, $rg(A^*)\geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{F1+F_2=F3} 0$; Por tanto $rg(A^*) = 2$

$rg(A) = rg(A^*) = 2 < nº\ incógnitas$: Sistema Compatible Indeterminado.

También podíamos ver que la cuarta columna de A^* es combinación lineal de la tercera, con lo que $rg(A) = rg(A^*)$

b) Resolvemos para $a = 3$:

Observando el menor $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$z = t;\quad \begin{cases} x + y = 0 \\ 2y = 3 - t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$, de donde $y = \frac{3-t}{2}$; $x = \frac{t-3}{2}$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2+x^2} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \dfrac{2x^2}{3-3x} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)^{2x^2-1}$.

c) (0.75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

Resolución

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ x < -1,\quad f(x) = \frac{x^2}{2+x^2}$, continua por ser función racional con denominador no nulo.

$\forall x \in \mathbb{R}\ x > -1\ x \neq 1,\quad f(x) = \frac{2x^2}{3-3x}$, continua por ser función racional con denominador no nulo.

$x = -1$

$f(-1) = \frac{1}{3}$

$Existencia\ de\ \lim\limits_{x \to -1} f(x)\ \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x^2}{2+x^2} = \frac{1}{3} \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{2x^2}{3-3x} = \frac{1}{3} \end{cases}$

Por tanto $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \frac{1}{3} = f(-1)$. La función es continua en $x = -1$

$x = 1$ La función no está definida en $x = 1$ con límites laterales infinitos.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1} \overset{1^{+\infty}}{\cong} e^{\lim_{x\to+\infty}\left[(2x^2-1)\cdot\left(\frac{x^2}{2+x^2}-1\right)\right]} =$
$e^{\lim_{x\to+\infty}\left[(2x^2-1)\cdot\left(\frac{-2}{2+x^2}\right)\right]} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-4x^2+2}{2+x^2}\right]} = e^{-4} = \frac{1}{e^4}$

c) $\int_{-1}^{0}\frac{2x^2}{3-3x}\,dx \overset{efectuando\ la\ división}{\cong} \int_{-1}^{0}\left(-\frac{2}{3}(x+1)+\frac{2}{3-3x}\right)dx = -\frac{2}{3}\left[\frac{(x+1)^2}{2}+L|3-3x|\right]_{-1}^{0} =$
$=-\frac{1}{3}+\frac{2L2}{3}$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}$, el plano $\pi: x-z=2$ y el punto $A(1,1,1)$, se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.

b) (0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r.

Resolución

a) Un punto genérico de la recta r es $P(1+2\lambda, \lambda, -1-2\lambda)$

Como $1+2\lambda+1+2\lambda=2$ tiene solución $\lambda=0$, se tiene que la recta corta al plano en el punto $P(1,0,-1)$

b) Hallamos la recta r_1 perpendicular a π que pase por A. El vector de dirección de la recta r_1 es el normal del plano $\vec{n}=(1,0,-1)$:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1+\mu \\ y = 1 \\ z = 1-\mu \end{cases}$$

La intersección de esta recta con el plano π es la proyección buscada:

$$1+\mu-1+\mu=2\ ;\ \mu=1\ ;\ El\ punto\ es\ A'=(2,1,0)$$

c) Plano π' perpendicular a la recta r que pasa por $A(1,1,1)$:

El vector normal del plano es el director de la recta:

$$\pi' \equiv 2x+y-2z+D=0$$
$$A\in\pi \Longrightarrow 2+1-2+D=0 \Longrightarrow D=-1$$
$$\pi' \equiv 2x+y-2z-1=0$$

Sea M el punto de intersección de la recta r y el plano π':

$$2(1+2t)+t-2(-1-2t)-1=0 \Leftrightarrow 9t=-3 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{3}$$

El punto $M\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ es medio entre A y su simétrico $A''(x,y,z)$:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{1}{3}\Longrightarrow x=-\frac{1}{3}\ ;\ \frac{y+1}{2}=-\frac{1}{3}\Longrightarrow y=-\frac{5}{3}\ ;\ \frac{z+1}{2}=-\frac{1}{3}\Longrightarrow x=-\frac{5}{3}$$

El punto buscado es $A''\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La longitud de la sardina del Pacífico (*Sardinops sagax*) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25.75 mm.

a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?

b) (0.5 puntos) Hallar una longitud $t < 175$ mm tal que entre t y 175 mm estén el 18 % de las sardinas capturadas.

c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

Resolución

Sea la variable aleatoria $X =$ "$Longitud\ de\ la\ sardina$". $X \hookrightarrow N(175, 25{,}75)$; Z$\hookrightarrow N(0,1)$

�) $p(X > 160) = 1 - p(X \leq 160) = 1 - p\left(Z \leq \dfrac{160-175}{25{,}75}\right) = 1 - p(Z \leq -0{,}58) = p(Z \leq 0{,}58)$
$= 0{,}7190$

El 71,90% serán de longitud por encima de 160 mm

b) Sea $t = 175 - k\ \ con\ k > 0$

$p(175 - k \leq X \leq 175) = 0{,}18 \Leftrightarrow$

$$p\left(\frac{-k}{25{,}75} \leq Z \leq 0\right) = 0{,}18 \Leftrightarrow p(Z \leq 0) - p\left(Z \leq \frac{-k}{25{,}75}\right) = 0{,}18 \Leftrightarrow p\left(Z \leq \frac{-k}{25{,}75}\right) = 0{,}32$$

$$\Leftrightarrow\ p\left(Z \geq \frac{k}{25{,}75}\right) = 0{,}32 \Leftrightarrow 1 - p\left(Z < \frac{k}{25{,}75}\right) = 0{,}32 \Leftrightarrow p\left(Z < \frac{k}{25{,}75}\right) = 0{,}68$$

$$\Rightarrow \frac{k}{25{,}75} = 0{,}465 \Rightarrow k \approx 11{,}97375$$

El valor buscado es $t \cong 175 - 11{,}97 = 163{,}03\ mm$

c) Consideramos el suceso $A =$ "$Una\ sardina\ tiene\ una\ longitud\ menor\ de\ 150\ mm$" ;

$$p(X < 150) = p\left(Z < \frac{150-175}{25{,}75}\right) = p(Z < -0{,}97) = 1 - p(Z \leq 0{,}97) = 0{,}166$$

$p(A) = 0{,}166 = p$ y esta probabilidad es la misma cada vez que se pesca una sardina. $n = 10$
Sea la variable aleatoria discreta $X =$ "$Número\ de\ sardinas\ de\ longitud\ menor\ de\ 150\ mm$"
Se trata de una binomial $X \hookrightarrow B(10, 0{,}166)$

$$P(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}834^{10} \cong 0{,}8372$$