1º) Dadas las matrices reales: $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se verifica que $A^tB = C$.

b) Calcular, si existen, los valores de m para los que existe la inversa de AC y calcular para $m = 0$ la inversa de AC.

c) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se cumple que $B^2 = B - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

Resolución

a) $A^tB = \begin{pmatrix} 2m^2-2 & -m \\ -2m & 1 \\ 3m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow m = 1.$

b) $AC = \begin{pmatrix} 5 & -m-2 \\ 3m & -m+2 \end{pmatrix} \Rightarrow |AC| = 3m^2 + m + 10 = 0$. Esta ecuación no tiene solución. Por lo tanto, $\forall m \in \mathbb{R}$ existe la matriz inversa de AC.

Para $m = 0$, se tiene que $(AC)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

c) $B^2 = \begin{pmatrix} 4m^2-1 & -2m \\ 2m & -1 \end{pmatrix}$ y $B - I = \begin{pmatrix} 2m-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, $m = \frac{1}{2}$.

2º) Se considera el sistema $\begin{cases} x + 2y - az = 1 \\ \quad -y + z = 0 \\ ax \qquad + z = a \end{cases}$

a) Discútase según los valores del parámetro real a.

b) Resuélvase el sistema en el caso $a = 1$.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2$$

$|A| = 0 \iff a = 1$

Caso 1 $\forall a \in \mathbb{R}$ $a \neq 1$. $|A| \neq 0$. Por tanto $rg(A) = 3 = rg(A^*) = nº\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $a = 1$. En este caso $|A| = 0$ y $rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculemos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$, $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^*:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ Por tanto $rg(A^*) = 2.$

$$rg(A) = rg(A^*) = 2 < nº\ incógnitas\text{:}\ \ Sistema\ compatible\ Indeterminado$$

b) Observando el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad -y + z = 0 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$z = t;\quad \begin{cases} x + 2y = 1 + t \\ \quad -y \ = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R},$ de donde $y = t\ ;\ x = 1 - t$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

3º) Un ayuntamiento ha dividido en parcelas parte del terreno municipal no urbanizable y lo ha cedido a los vecinos para su cultivo. Uno de los vecinos ha decidido que en su parcela asignada utilizará como huerto una zona rectangular de 72 metros cuadrados, dejando el resto para plantar frutales e instalar una caseta donde guardar las herramientas. La zona de huerto estará dividida en dos partes: la parte dedicada al cultivo de hortalizas será un rectángulo interior separado de los lados que delimitan el huerto. La separación será de medio metro entre cada uno de los lados de mayor longitud y de un metro entre cada uno de los lados de menor longitud.

a) Calcula las dimensiones del huerto para que el área de la zona para el cultivo de hortalizas sea máximo.

b) Calcula el área de la zona de cultivo de hortalizas.

Resolución

a) Sean x y $72/x$ las longitudes de los lados mayor y menor, respectivamente, del rectángulo dedicado al huerto (su área es 72 metros cuadrados). El área de la zona de cultivo de hortalizas vendrá dada por la función

$$A(x) = (x-2)\left(\frac{72}{x} - 1\right) = 74 - x - \frac{144}{x}.$$

El máximo de la función se alcanza en el valor $x = 12$ por lo que las dimensiones del huerto serán 12 metros de largo por 6 metros de ancho.

b) El área de la zona de cultivo de hortalizas será 50 metros cuadrados.

4º)

a) Determina la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x + xe^{-x}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Estudia la monotonía, extremos relativos y asíntotas de la función $y = x^2 e^{-x}$

Resolución

a) $\quad f'(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = 1 + (1-x)\cdot e^{-x}\ ;\ f(1) = 1 + \frac{1}{e}\ ;\ f'(1) = 1$

$$La\ ecuación\ de\ la\ recta\ tangente\ es\ t \equiv y - 1 - \frac{1}{e} = x - 1\ ;\ t \equiv y = x + \frac{1}{e}$$

b)

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2-x)e^{-x} : \begin{cases} < 0 \ \text{ si } \ x < 0 & : f \text{ decreciente} \\ > 0 \ \text{ si } \ 0 < x < 2 & : f \text{ creciente} \\ < 0 \ \text{ si } \ x > 2 & : f \text{ decreciente} \end{cases}$$

$$f(0) = 0\ ;\ f(2) = 4/e^2$$

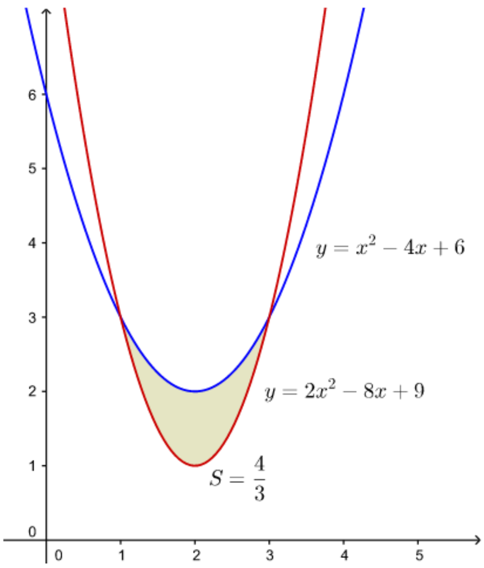
$$\text{En resumen} \quad \boxed{\begin{cases} f \text{ decreciente en } (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \\ f \text{ creciente en } (0,2) \\ \text{Mínimo relativo en } (0,0) \\ \text{Máximo relativo en } (2, 4/e^2) \end{cases}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^2 e^{-x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0\ ;\ \left[\begin{array}{l}\text{Infinito del numerador de menor orden} \\ \text{que el del denominador}\end{array}\right]$$

Por tanto: $\boxed{y = 0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \to \infty}$

5º) Dadas las parábolas $f(x) = x^2 - 4x + 6$ y $g(x) = 2x^2 - 8x + 9$, se pide:
a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.
b) Halla el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Resolución



$y_1 = x^2 - 4x + 6$; $y_2 = 2x^2 - 8x + 9$

Puntos de corte $\begin{cases} y_1 = x^2 - 4x + 6 \\ y_2 = 2x^2 - 8x + 9 \end{cases}$

$2x^2 - 8x + 9 = x^2 - 4x + 6$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1\,,\ x_2 = 3}$

Vértices de las parábolas

$\left.\begin{array}{l} y_1 = x^2 - 4x + 6\ ;\ \boxed{x_v = 2\,,\ y_v = 2} \\ y_2 = 2x^2 - 8x + 9\ ;\ \boxed{x_v = 2\,,\ y_v = 1} \end{array}\right\}$

Puntos de corte con OY : $\boxed{(0,6)\ \text{ y }\ (0,9)}$

$S = \left| \int_1^3 (y_1 - y_2)\ dx \right| = \left| \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\ dx \right| =$

$= \left| \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^3 \right| = \boxed{\frac{4}{3}\ \text{u}^2}$

6º) El 40% de los sábados, Marta va al cine, el 30% va de compras y el 30% restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60% de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20% de las veces que va de compras y el 80% de las veces que juega a videojuegos. Se pide:
a) La probabilidad de que próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.
b) Si se sabe que Marta ha quedado con sus compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?

Resolución

Descripción de sucesos y probabilidades

CI : Marta va al cine

CO : Marta va de compras

VI : Marta juega a videojuegos

BA : Marta realiza actividades con sus compañeros de baloncesto $\left(\overline{BA}\text{: sin ellos}\right)$

$p(CI) = 0{,}4$; $p(CO) = 0{,}3$; $p(VI) = 0{,}3$

$p(BA/CI) = 0{,}6$; $p(BA/CO) = 0{,}2$; $p(BA/VI) = 0{,}8$

a. $p(BA) = p(BA/CI) \cdot p(CI) + p(BA/CO) \cdot p(CO) + p(BA/VI) \cdot p(VI) =$
$= 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}54$
$p\left(\overline{BA}\right) = 1 - p(BA) = 1 - 0{,}54 = \boxed{0{,}46}$

b. $p(CI/BA) = \frac{p(BA/CI) \cdot p(CI)}{p(BA)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{0{,}54} = \boxed{\frac{4}{9} \approx 0{,}444}$

7º)

Una empresa complementa el sueldo de sus empleados según la consecución de ciertos objetivos valorados en función de una puntuación que sigue una distribución normal $N(100; 35)$. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular el porcentaje de empleados con una puntuación comprendida entre 100 y 140.

b) (0.75 puntos) Hallar la probabilidad de que un trabajador obtenga una puntuación inferior a 95 puntos.

c) (1 punto) Determinar la puntuación mínima necesaria para cobrar los objetivos si el 75.17 % de la plantilla ha recibido dicho incentivo.

Resolución

$X \equiv$ puntuación $\sim N(100; 35)$

a) $P(100 < X < 140) = P(0 < Z < 1.14) = 0.8729 - 0.5 = 0.3729 \Rightarrow 37.29\,\%$.
b) $P(X < 95) = P(Z < -0.14) = P(Z > 0.14) = 1 - 0.5557 = 0.4443$.
c) $P(X \geq k) = P\left(Z \geq \frac{k - 100}{35}\right) = P\left(Z \leq \frac{-k + 100}{35}\right) = 0.7517 \Rightarrow \frac{-k + 100}{35} = 0.68 \Rightarrow k = 76.2$ es la puntuación mínima necesaria para cobrar los objetivos.

8º) Dado el plano $\pi \equiv 2x+2y+z-3=0$ y los puntos $A(1,0,2) y\ B(2,1,-1)$ halla el área del triángulo ABC , siendo C el pie de la perpendicular de A a π.

Resolución

$\pi:\ 2x+2y+z-3=0$

$A\ (1,0,2)\ ,\ B\ (2,1,-2)$

recta perpendicular a π por A :

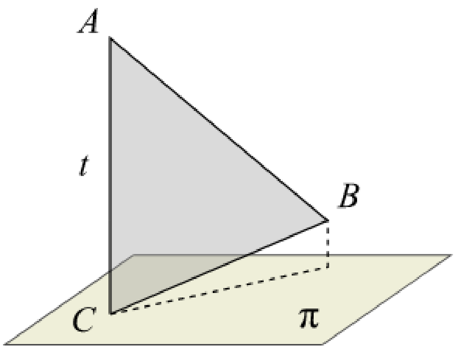
$t:(1+2\lambda,\ 2\lambda,\ 2+\lambda)\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$

$C = t \cap \pi$

Sustituyendo las coordenadas paramétricas de t en π:

$2(1+2\lambda)+2(2\lambda)+(2+\lambda)-3=0;\ 9\lambda+1=0\ ;\ \lambda=-1/9$

$C=\left(1+2\left(-\frac{1}{9}\right),\ 2\left(-\frac{1}{9}\right),\ 2+\left(-\frac{1}{9}\right)\right)\ ;\ \boxed{C=\left(\frac{7}{9},\ -\frac{2}{9},\ \frac{17}{9}\right)}$



$\overrightarrow{AB}=(1,1,-4)\ ;\ \overrightarrow{AC}=\left(-\frac{2}{9},\ -\frac{2}{9},\ -\frac{1}{9}\right)=-\frac{1}{9}(2,2,1)$

área triángulo $=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{18}|(1,1,-4)\times(2,2,1)| =$

$=\frac{1}{18}|(9,-9,0)|=\frac{1}{18}9\sqrt{2}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$
