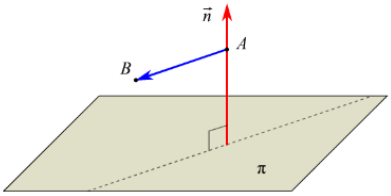
1º) Dados los puntos $A(1,0,-1)$, $B(k,3,0)$ y $C(2,-1,3)$ y el plano $\pi \equiv 2x-y+4z-1=0$

a) Determina k para que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea paralelo al plano π

b) Halla el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos A y C con el plano π.

c) Halla el área del triángulo de vértices los puntos A, C y el origen de coordenadas.

Resolución



a) Vector $\overrightarrow{AB}=(k-1,3,1)$

Vector normal del plano $\vec{n}=(2,-1,4)$

Los dos vectores han de ser perpendiculares:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0 \Longrightarrow 2\cdot(k-1)-3+4=0 \Longrightarrow 2k=1 \Longrightarrow k=\frac{1}{2}$$

b) El vector de dirección de la recta $r(A,C)$ es $\vec{u}=\overrightarrow{AC}=(1,-1,4)$ y el vector normal del plano π es $\vec{n}=(2,-1,4)$

$$sen(\widehat{r,\pi})=|cos(\widehat{\vec{u},\vec{n}})|=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\hat{u}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{19}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{21}}=0{,}97725 \Longrightarrow (\widehat{r,\pi})=77{,}82°$$

c) $O(0,0,0)$; $\overrightarrow{OA}=(1,0,-1)$, $\overrightarrow{OC}=(2,-1,3)$

$$Área=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\,x\,\overrightarrow{OC}|\overset{[1]}{=}\frac{\sqrt{1+25+1}}{2}=\frac{\sqrt{27}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\,u^2$$

$$\overrightarrow{OA}\,x\,\overrightarrow{OC}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=-\vec{\imath}-5\,\vec{\jmath}-\vec{k} \quad [1]$$

2º) Determina los puntos de la recta $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{2}$ que equidistan de los planos $\pi_1\equiv 3x+4y-1=0$ y $\pi_1\equiv 4x-3z-1=0$

Resolución

$$r:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{2}\ ;\ r:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=-1+3\lambda\\ z=-2+2\lambda\end{cases}$$

$\pi_1:\ 3x+4y-1=0$

$\pi_2:\ 4x-3z-1=0$

$d(r,\pi_1)=d(r,\pi_2)$

$$\frac{|3(1+2\lambda)+4(-1+3\lambda)-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|4(1+2\lambda)-3(-2+2\lambda)-1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$$

$\frac{|18\lambda-2|}{5}=\frac{|2\lambda+9|}{5}$; $18\lambda-2=\pm(2\lambda+9)$

$18\lambda-2=2\lambda+9$; $\lambda_1=\frac{11}{16}$

$18\lambda-2=-2\lambda-9$; $\lambda_2=-\frac{7}{20}$

$$P_1:\begin{cases}x=1+2\frac{11}{16}\\ y=-1+3\frac{11}{16}\\ z=-2+2\frac{11}{16}\end{cases}\ ;\ \boxed{P_1=\left(\frac{38}{16},\frac{17}{16},-\frac{10}{16}\right)}\ ;\ P_2:\begin{cases}x=1+2\left(-\frac{7}{20}\right)\\ y=-1+3\left(-\frac{7}{20}\right)\\ z=-2+2\left(-\frac{7}{20}\right)\end{cases}\ ;\ \boxed{P_2=\left(\frac{6}{20},-\frac{41}{20},-\frac{54}{20}\right)}$$

3º) Dado el plano $\pi\equiv x-y+z=0$

a) Halla el punto simétrico del punto $P(1,0,1)$ respecto del plano π.

b) Halla la ecuación de la recta simétrica de la recta $r\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=\quad 3\lambda\\ z=1+3\lambda\end{cases}$ respecto del plano π

Resolución

$\Pi \equiv x - y + z = 0$; $P\,(1,0,1)$

a) ¿P' simétrico de P respecto de Π ?

$\overrightarrow{n} = (1,\,-1,1)$ vector normal o característico de Π

recta t que pasa por P y P':

$\boxed{t : (1+\lambda, -\lambda,\, 1+\lambda)}$

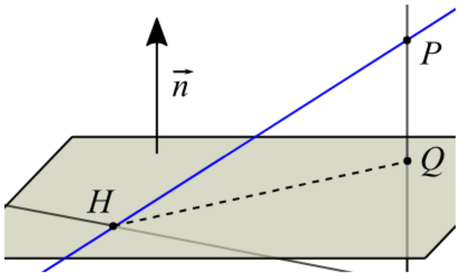
$Q = t \cap \Pi :\ 1+\lambda+\lambda+1+\lambda = 0;\ 3\lambda = -2;\ \lambda = -2/3$

$Q = (1/3, 2/3;\ 1/3)$

$P'\,(x,\,y,\,z)$; Q es el punto medio entre P y P':

$$\left(\tfrac{x+1}{2},\ \tfrac{y+0}{2},\ \tfrac{z+1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = -1/3 \\ y = 4/3 \\ z = -1/3 \end{cases}$$

$$\boxed{P' = \left(\tfrac{-1}{3},\ \tfrac{4}{3},\ \tfrac{-1}{3}\right)}$$



b) ¿ r' simétrica de r respecto de Π ?

$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{3}$; $r \equiv (1+\mu,\ 3\mu,\ 1+3\mu)$

$H = r \cap \Pi$; $1+\mu-3\mu+1+3\mu = 0$; $\mu = -2$

$\boxed{H = (-1,\,-6,\,-5)}$

$\overrightarrow{HP'} = \left(\frac{2}{3},\ \frac{22}{3},\ \frac{14}{3}\right)$; $\overrightarrow{u} = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3},\ \frac{22}{3},\ \frac{14}{3}\right) = (1,11,7)$

$\boxed{r' \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y+6}{11} = \frac{z+5}{7}}$

4º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y \quad\quad - 1 = 0 \\ -3y + z - 2 = 0 \end{cases}$ $\quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$

a) Estudia su posición relativa de las rectas.

b) Calcula la distancia entre ellas.

b) Calcula la perpendicular común.

Resolución

a) Vector director $\vec{u}$ de la recta r: $\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} - 3\,\vec{k} = (1,-1,-3)$

Vector director $\vec{v}$ de la recta s: $\vec{v} = (1,-2,-3)$

Como $rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = 2$ al ser $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, las rectas se cortan o se cruzan.

Punto de la recta r: $P(1,0,2\,)$ si $y = 0$. Punto de la recta s: $Q(0,0,2)$. Vector $\overrightarrow{PQ} = (-1,0,0)$

Como $\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}\right] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, rg\left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}\ \right) = 3\ y\ las\ rectas\ se\ cruzan$

b)

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 3\vec{\imath} - \vec{k} = (3,0,-1)\quad ;\quad |\vec{u} \wedge \vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}\ u$$

c) Plano π paralelo a r y s:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv 3x + z = 0\ \ \text{Vector normal}\ \vec{n} = (3,0,1)$$

Plano π_1 perpendicular a π que contenga a r:

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi_1 \equiv x + 10y - 3z + 5 = 0$$

Plano π_2 perpendicular a π que contenga a s:

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi_2 \equiv x + 5y - 3z + 6 = 0$$

La recta perpendicular común a las rectas dadas es $t \equiv \begin{cases} x + 10y - 3z + 5 = 0 \\ x + 5y - 3z + 6 = 0 \end{cases}$

En forma paramétrica $t \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = \frac{1}{5} \\ z = \frac{7}{3} + \lambda \end{cases}$

Puntuación

1, 4 ---------- 3 puntos
2, 3 --------- 2 “