1º) Dada la función $f(x)=\frac{e^{-x}}{x^2+1}$ determina:

a) la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x=0$.

b) asíntotas.

c) monotonía.

d) una aproximación de su gráfica.

Resolución

a) La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x=0$ es:

$$t \equiv y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$$

$$f(0)=\frac{e^0}{0+1}=1\ ;\ f'(x)=\frac{-e^{-x}\cdot(x^2+1)-2x\cdot e^{-x}}{(x^2+1)^2}=\frac{-e^{-x}\cdot(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}\ \ ;\ f'(0)=-1$$

$$t\equiv y-1=-x \ \Leftrightarrow t\equiv y=1-x$$

b) No tiene asíntotas verticales porque $\lim\limits_{x\to a}\frac{e^{-x}}{x^2+1}=\frac{e^{-a}}{a^2+1}\neq\infty$ al no anularse a^2+1

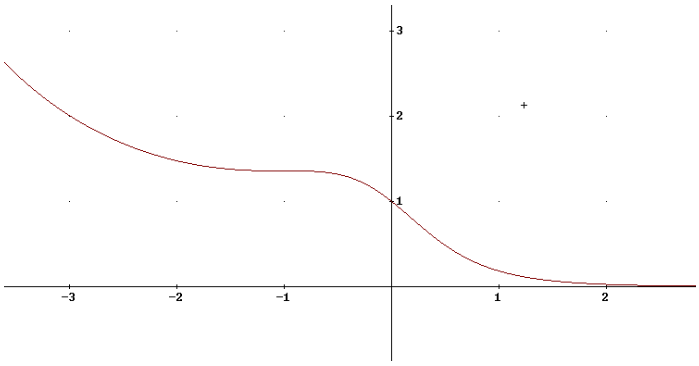
Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x\cdot(x^2+1)}\overset{\frac{1}{+\infty}}{=}0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal y no tiene oblicua.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^2+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}L'Hop}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}L'Hop}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{2}=+\infty$$

c) Se trata de estudiar el signo de la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}\cdot(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}=-\frac{e^{-x}\cdot(x+1)^2}{(x^2+1)^2}<0$$ La función es decreciente en $\mathbb{R}$.

d) La función es continua en $\mathbb{R}$, decreciente, con asíntota horizontal $y=0$ en $+\infty$:



2º) Dada la función la función $f(x)=\begin{cases}1-\frac{senx}{x} & si\ \ x<0\\ x\cdot e^{4-x^2} & si\ x\geq 0\end{cases}$ se pide:

a) Estudia su continuidad y derivabilidad en $x=0$.

b) Calcula $\int_0^2 f(x)\,dx$

Resolución

a)

Para que $f(x)$ sea continua en $x=0$ se deben cumplir las condiciones de continuidad de una función en un punto:

1] $f(0)=0\cdot e^4=0$

2] $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \left(1-\frac{senx}{x}\right) \stackrel{L'Hop}{=} 1-\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{cosx}{1} = 1-1 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \left(x \cdot e^{4-x^2}\right) = 0 \cdot e^4 = 0 \end{cases}$ de donde $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

3] $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ La función es continua en $x = 0$

$f'(x) = \begin{cases} -\frac{xcosx-senx}{x^2} & si\ x<0 \\ e^{4-x^2} + xe^{4-x^2}(-2x) & si\ x>0 \end{cases}$ y está bien definida.

Veamos si $f(x)$ sea derivable en $x = 0$:

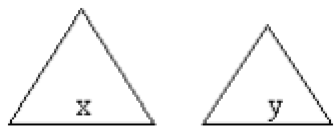
$$f'(0)^- = -\lim_{x\to 0} \frac{xcosx-senx}{x^2} \stackrel{L'Hop}{=} -\lim_{x\to 0} \frac{-xsenx}{2x} \stackrel{L'Hop}{=} \lim_{x\to 0} \frac{senx+xsenx}{2} = 0$$

$f'(0)^+ = \lim\limits_{x\to 0}\left(e^{4-x^2} + xe^{4-x^2}(-2x)\right) = e^4$ Así, la función no es derivable en $x = 0$

b) $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x \cdot e^{4-x^2} = -\frac{1}{2}\int_0^2 -2x \cdot e^{4-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{4-x^2}\right]_0^2 = \frac{e^4-1}{2}$

3º)

Con 60 centímetros de alambre se construyen dos triángulos equiláteros cuyos lados miden x e y. ¿Qué valores de x e y hacen que la suma de las áreas de los triángulos sea mínima.



Resolución

La altura del triángulo de lado x es:

$$h_x = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

la del triángulo de lado y es, $h_y = \frac{\sqrt{3}}{2}y$

Se cumple que $3x + 3y = 60 \Rightarrow y = 20 - x$

Se desea que

$$S = S_x + S_y = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} + \frac{y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + y^2)$$

sea mínima.

Sustituyendo $y = 20 - x$, se tiene: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + (20-x)^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2 - 40x + 400)$

Para que S sea mínima: $S' = 0$ y $S'' > 0$:

$$S' = \frac{\sqrt{3}}{2}(x-10) = 0 \Rightarrow x = 10$$

Como $S'' = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, para ese valor de x = 10 se tiene el mínimo buscado.

En consecuencia, los lados será $x = 10$ e $y = 10$; o sea, dos triángulos equiláteros iguales.

4º) Calcula $\lim_{x\to 0^+}(tgx)^x$

Resolución

$$\lim_{x\to 0^+}(tgx)^{senx} \overset{0^0}{\cong}$$

Tomamos logaritmo neperiano:

$$ln\left(\lim_{x\to 0^+}(tgx)^x\right)=\lim_{x\to 0^+}(ln(tgx)^x)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot ln(tgx)\right)\overset{0\cdot(-\infty)}{\cong}\lim_{x\to 0^+}\frac{ln(tgx)}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}L`H\hat{o}p}{\cong}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\frac{1}{cos^2x}}{tgx}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{cos^2x\cdot tgx}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{senx\cdot cosx}\overset{\frac{0}{0}L`H\hat{o}p}{\cong}\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x}{cos^2x-sen^2x}=\frac{0}{1}=0$$

$$ln\left(\lim_{x\to 0^+}(tgx)^x\right)=0\Longrightarrow\lim_{x\to 0^+}(tgx)^x=e^0=1$$

5º) Calcula las siguientes integrales:

$a)\int\sqrt{x}\cdot Lx\,dx$

b) $\int\frac{x^3+4x^2+5x+1}{x^2+4x+4}\,dx$

Resolución

a)

Lo intentamos por el método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l}u=Lx\\ dv=\sqrt{x}\,dx\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}du=\frac{1}{x}dx\\ v=\int dv=\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\quad(dejamos\ C\ para\ el\ final)\end{array}\right.$$

Aplicamos la fórmula y substituimos:

$$I=\int\sqrt{x}\,Lx\,dx=\int u\,dv=u\cdot v-\int v\,du=Lx\cdot\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\int\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\frac{1}{x}dx=\frac{2\sqrt{x^3}\,Lx}{3}-\frac{2}{3}\int\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x}dx=$$

$$=\frac{2\sqrt{x^3}\,Lx}{3}-\frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2\sqrt{x^3}\,Lx}{3}-\frac{2}{3}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2\sqrt{x^3}\,Lx}{3}-\frac{4}{9}\sqrt{x^3}+C$$

b) $I=\int\frac{x^3+4x^2+5x+1}{x^2+4x+4}\,dx=\int x\,dx+\int\frac{x+1}{(x+2)^2}dx=x+c_1+I_1$ una vez efectuada la división del radicando al tratarse de una integral racional con integrando con grado del numerador mayor que el del denominador.

$I_1=\int\frac{x+1}{(x+2)^2}dx$, se trata de una integral racional

Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{x+1}{(x+2)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}=\frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2}$$

$$x+1=A(x+2)+B$$

Sustituyendo $x = -2$ y $x = 0$ obtenemos $\begin{cases} -1 = B \\ 1 = 2A + B \end{cases}$ de donde $A = 1$ y $B = -1$

Así,

$$I_1 = \int \frac{x+1}{(x+2)^2}\, dx = \int \frac{1}{x+2}\, dx - \int \frac{1}{(x+2)^2}\, dx = L|x+2| + \frac{1}{x+2} + c_2$$

$$I = \int \frac{x^3 + 4x^2 + 5x - 1}{x^2 + 4x + 4} dx = \frac{x^2}{2} + L|x+2| + \frac{1}{x+2} + c$$

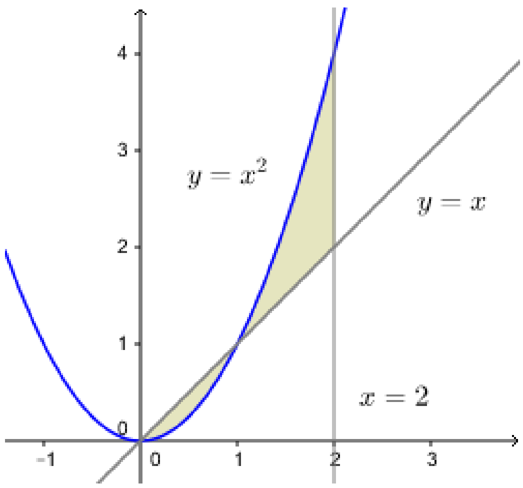
6º)

a) Dibuja el recinto limitado por la curva $y = x^2$, la recta $y = x$, y la recta $x = 2$.

b) Halla el área del recinto dibujado en el apartado anterior

Resolución

a)



b) Cortes.

$$x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \int_0^1 (x - x^2)\, dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = 1\ u^2$$

Puntuación

1 -------------- 3 puntos

2, 3 ----------- 1,5 “

4 -------------- 0,75 “

5 -------------- 2 “

6 -------------- 1,25