1º) En un experimento aleatorio A y B son sucesos tales que $p(A) = 0{,}7$, $p(B) = 0{,}6$ y $p(A \cup B) = 0{,}9$

a) Comprueba si los sucesos A y B son independientes o no.
b) Calcula $p(A - B)$ y $p(A|\bar{B})$ siendo $\bar{A}$ el suceso contrario de A.
c) Calcula la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

Resolución

a. $p(A) = 0{,}7$; $p(B) = 0{,}6$; $p(A \cup B) = 0{,}9$

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}9 = 0{,}4$$

$$p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{2}{3} \approx 0{,}6667 \neq 0{,}7 = p(A) \Rightarrow \boxed{A \text{ y } B \text{ no son independientes}}$$

b. $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = 0{,}7 - 0{,}4 = \boxed{0{,}3}$

$$p\left(A/\overline{B}\right) = \frac{p\left(A\cap\overline{B}\right)}{p\left(\overline{B}\right)} = \frac{p(A-B)}{1-p(B)} = \frac{0{,}3}{1-0{,}6} = \frac{3}{4} = \boxed{0{,}75}$$

c. $p(\bar{A} \cap \bar{B}) \overset{L.\ Morgan}{\triangleq} p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

2º) En una red social el 55% lee noticias deportivas, el 65% lee noticias de información y el 10% no lee las noticias deportivas ni las de información. Se elige al azar una persona de esta red social:

a) Calcula la probabilidad de que lea noticias deportivas o de información.
b) Sabiendo que lee noticias de información, calcula la probabilidad de que también lea noticias deportivas.
c) Sabiendo que lee noticias deportivas, calcula la probabilidad de que no lea noticias de información.
d) Calcula la probabilidad de que solo lea un tipo de noticias.

Resolución

Describimos los sucesos y sus probabilidades:

$D =$ "*La persona elegida lee noticias deportivas*; $p(D) = 0{,}55$

$I =$ "*La persona elegida lee noticias de información*; $p(I) = 0{,}65$

Además, $p(\bar{D} \cap \bar{I}) = 0{,}1$

a) $p(D \cup I) = 1 - p(\overline{D \cup I}) \overset{L.Morgan}{\triangleq} 1 - p(\bar{D} \cap \bar{I}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

b) $p(D|I) = \frac{p(D\cap I)}{p(I)} \overset{[1]}{\triangleq} \frac{0{,}3}{0{,}65} = \frac{30}{65} = \frac{6}{13} \approx 0{,}4615$

$p(D \cup I) = p(D) + p(I) - p(D \cap I) \Leftrightarrow 0{,}9 = 0{,}65 + 0{,}55 - p(D \cap I) \Leftrightarrow p(D \cap I) = 0{,}3$ [1]

c) $p(\bar{I}|D) = \frac{p(D\cap\bar{I})}{p(D)} = \frac{p(D)-p(D\cap I)}{p(D)} = \frac{0{,}55-0{,}3}{0{,}55} = \frac{0{,}25}{0{,}55} = \frac{25}{55} = \frac{5}{11} \approx 0{,}4545$

d) $p\big((D \cap \bar{I}) \cup (I \cap \bar{D})\big) = p(D \cup I) - p(D \cap I) = 0{,}9 - 0{,}3 = 0{,}6$

3º) El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es de 140, por la tarde 200 y 40 por la noche. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2%, por la tarde del 4% y por la noche de un 6%.

a) Calcula la probabilidad de que no se retrase un vuelo con destino a ese aeropuerto.
b) Si un vuelo llegó con retraso a ese aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo de la tarde?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que un vuelo que no llegó con retraso no fuese de la mañana?

Resolución

Describimos los sucesos y sus probabilidades:

$M = "El\ vuelo\ llega\ por\ la\ mañana"\ ; p(M) = \frac{140}{140+200+40} = \frac{140}{380} = \frac{7}{19}$

$T = "El\ vuelo\ llega\ por\ la\ tarde"\ ; p(T) = \frac{200}{140+200+40} = \frac{200}{380} = \frac{10}{19}$

$N = "El\ vuelo\ llega\ por\ la\ noche"\ ; p(N) = \frac{40}{140+200+40} = \frac{40}{380} = \frac{2}{19}$

$R = "El\ vuelo\ se\ retrasa"\ ; p(R|M) = 0{,}02\ ;\ \ p(R|T) = 0{,}04\ ;\ \ p(R|T) = 0{,}06$

a) $p(R) = p(M) \cdot p(R|M) + p(T) \cdot p(R|T) + p(N) \cdot p(R|N) = \frac{7}{19} \cdot 0{,}02 + \frac{10}{19} \cdot 0{,}04 + \frac{2}{19} \cdot 0{,}06 = \frac{33}{950}$

$$p(\bar{R}) = 1 - \frac{33}{950} = \frac{917}{950} \approx 0{,}9653$$

b) $p(T|R) = \frac{p(T)\cdot p(R|T)}{p(R)} = \frac{\frac{10}{19}\cdot 0{,}04}{\frac{33}{950}} = \frac{\frac{2}{95}}{\frac{33}{950}} = \frac{1900}{3135} = \frac{20}{33} \approx 0{,}6061$

c) Calculamos, en primer lugar, $p(M|\bar{R}) = \frac{p(M)\cdot p(\bar{R}|M)}{p(\bar{R})} = \frac{\frac{7}{19}\cdot\frac{98}{100}}{1-\frac{33}{950}} = \frac{\frac{686}{1900}}{\frac{917}{950}} = \frac{6517}{17423}$

Así, $p(\bar{M}|\bar{R}) = 1 - \frac{6517}{17423} = \frac{10906}{17423} \approx 0{,}6256$

4º) Los salarios mensuales de los recién graduados que acceden a su primer empleo siguen una distribución normal de media 1300 € **y desviación típica de** 600 €.
a) ¿Qué porcentaje de recién graduados cobra más de 2200 €?
b) De entre el 70% **de los salarios más bajos cuál es el más alto?**
c) Halla el intervalo centrado en la media que recoge el 65% de los salarios.

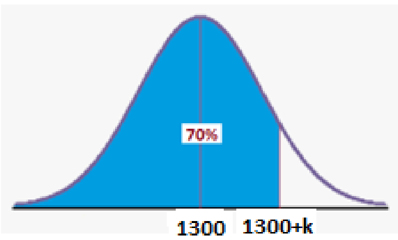
Resolución

Sea la variable aleatoria $X = "Salario\ de\ recien\ graduado"$. $X \hookrightarrow N(1300, 600)$; $Z \hookrightarrow N(0,1)$

a) $p(X > 2200) = 1 - p(X \leq 2000) = 1 - p\left(Z \leq \frac{2200-1300}{600}\right) = 1 - p(Z \leq 1{,}5) = 1 - 0{,}9332$

$= 0{,}0668$. El porcentaje de recién graduados que cobra más de 2200 € es 6,68%

b)

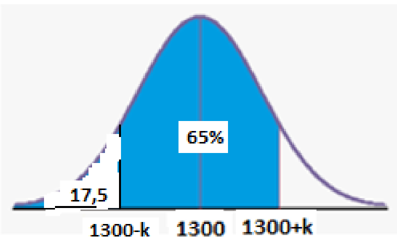


$p(X \leq 1300 + k) = 0{,}7 \Leftrightarrow p\left(Z \leq \frac{k}{600}\right) = 0{,}7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{k}{600} = 0{,}525 \Leftrightarrow k = 315$

Así, $1300 + k = 1300 + 315 = 1615$ € que es el salario más alto de entre el 70% que menos dinero gana.

c)



$p(X \leq 1300 + k) = 0{,}825\ \Leftrightarrow p\left(Z \leq \frac{k}{600}\right) = 0{,}825 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{k}{600} = 0{,}935 \Leftrightarrow k = 561$

El intervalo pedido es $(1300 - 561, 1300 + 561) = (739, 1861$

5º) Se ha comprobado que, al aplicar un determinado medicamento, la probabilidad de que elimine el acné a un paciente es del 80%.
Si se lo toman 10 pacientes,

a) ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe con más de 8 pacientes?
b) ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe con al menos 2 pacientes?
Si se lo toman 1000 pacientes,
c) ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe con más de 790 pacientes?
d) ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe con entre 800 y 822 pacientes?

Resolución

Consideramos el suceso $A = \text{"}El\ medicamento\ elimina\ el\ acné\text{"}$; $p(A) = 0{,}8 = p$ y esta probabilidad es la misma cada vez que volvemos a realizar el test. $n = 10$

Sea la variable aleatoria discreta $X = \text{"}Número\ de\ pacientes\ en\ los\ que\ actúa\ el\ medicamento\text{"}$

a) Se trata de una binomial $X \hookrightarrow B(10, 0'8)$

$$P(X > 8) = p(X = 9) + p(X = 10) = \binom{10}{9} 0{,}8^9 \cdot 0{,}2 + \binom{10}{10} 0{,}8^{10} = 10 \cdot 0{,}8^9 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^{10} =$$
$$= 0{,}37581$$

b) $P(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - \binom{10}{0} 0{,}2^{10} - \binom{10}{1} 0{,}8 \cdot 0{,}2^9 =$
$$= 1 - 0{,}2^{10} - 10 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^9 = 0{,}9999958016$$

c) $n = 1000$

Se trata de una binomial $X \hookrightarrow B(1000, 0'8)$

Como $np(1 - p) = 1000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 160 > 10$, la binomial se puede aproximar por una normal de media el producto $1000 \cdot 0'8 = 800$ y desviación típica $\sqrt{1000 \cdot 0'8 \cdot 0'2} = \sqrt{160} \approx 12{,}65$

$$X \hookrightarrow (1000, 0'8) \hookrightarrow N(800, 12'65)$$

$p(X > 790) =^{Tificamos} = p\left(Z > \frac{790{,}5 - 800}{12{,}65}\right) = p(Z > -0{,}75) = p(Z < 0{,}75) \overset{Tabla}{\cong} 0{,}7734$

d) $p(800 \leq X \leq 822) = p\left(\frac{799{,}5 - 800}{12{,}65} \leq Z \leq \frac{822{,}5 - 800}{12{,}65}\right) = p(-0{,}04 \leq Z \leq 1{,}78) \overset{Tabla}{\cong} p(Z \leq 1{,}78) -$
$p(Z < -0{,}04) = p(Z \leq 1{,}78) - \big(1 - p(Z \leq 0{,}04)\big) = 0{,}9625 - 1 + 0{,}5160 = 0{,}4785$

Puntuación

1 ------------------- 1’5 puntos
2, 5 ---------------- 2 “
3, 4 ---------------- 2,25 “