1º) Sea $k \in \mathbb{R}^+$ y la función $f(x)=\begin{cases} 3-kx^2 & si\ x\le 1 \\ \frac{2}{kx} & si\ x>1 \end{cases}$

Determina el valor de k para que la función sea derivable en el conjunto de los números reales.

Resolución

En primer lugar, la función es continua antes del 1 porque es polinómica y después del 1 porque es racional y nunca se anula el denominador.

Veamos k para que sea continua en $x=1$:

1º) $f(1)=3-k$

2º) $\lim_{x\to 1} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to 1^-}(3-kx^2) = 3-k \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{kx} = \frac{2}{k} \end{cases}$ $3-k=\frac{2}{k} \Leftrightarrow k^2-3k+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=2 \end{cases}$

$k=1$ Calculamos la función derivada:

$f'(x)=\begin{cases} -2x & si\ x<1 \\ \frac{-2}{x^2} & si\ x>1 \end{cases}$ que está bien definida antes y después de $x=1$

Las derivadas laterales en $x=1$ son $f'(1)^-=-2\ \ y\ \ f'(1)^+=-2$ y $f'(1)=-2$

$k=2$ Calculamos la función derivada:

$f'(x)=\begin{cases} -4x & si\ x<1 \\ \frac{-1}{x^2} & si\ x>1 \end{cases}$ que está bien definida antes y después de $x=1$

Las derivadas laterales en $x=1$ son $f'(1)^-=-4\ \ y\ \ f'(1)^+=-1$ y $f'(1)\ no\ existe$

Por tanto, la función es derivable en el conjunto de los números reales para $k=1$

2º) Dada la función $f(x)=\frac{(1-x)^2}{e^x}$**, se pide determinar:**

a) La ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ **en el punto de abscisa** $x=0$

b) Sus extremos.

Resolución

a) Obtenemos la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{-2(1-x)e^x-(1-x)^2e^x}{e^{2x}}=\frac{(1-x)(x-3)}{e^x}$$

$f(0)=1\ ;\ f'(0)=-3$

La recta tangente es $t\equiv y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\,;\ t\equiv y-1=-3\cdot x\ ;\ t\equiv y=-3x+1$

b) Obtenemos los puntos críticos:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (1-x)(x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

La recta real queda dividida en tres intervalos, $(-\infty,1)$, $(1,3)$ y $(3,+\infty)$

	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty$
Signo de $f'(x)$	$-$	$+$	$-$
f	Decrece	Crece	Decrece

Por tanto, la función tiene un mínimo relativo en $P(1,0)$ y un máximo relativo en $Q\left(3,\frac{4}{e^3}\right)$

3º) Demuestra que la ecuación $2x^3+x-5=0$ tiene exactamente una raíz real y calcúlala con una cifra decimal exacta.

Resolución

Sea $f(x)=2x^3+x-5$, función continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\ continua\ en\ [1,2] \\ f(1)=-2<0 \\ f(2)=13>0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_1\in(1,2)\ tal\ que\ f(c_1)=0 \Leftrightarrow 2{c_1}^3+c_1-5=0$$

Así, c_1 es raíz de la ecuación $2x^3 + x - 5 = 0$. Veamos que no tiene más.
Supongamos que c_2 fuese otra raíz de la ecuación; así $2{c_2}^3 + c_2 - 5 = 0 \ y \ f(c_2) = 0$
Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo (c_1, c_2) se tiene:

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \ continua \ en \ [c_1, c_2] \\ f(x) \ derivable \ en \ (c_1, c_2) \\ 0 = f(c_1) = f(c_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_1 \in (c_1, c_2) \ tal \ que \ f'(x_1) = 0$$

es decir, encontramos un punto x_1 de derivada nula.
Sin embargo, $f'(x) = 6x^2 + 1$ y $6x^2 + 1 \ = 0$ no tiene solución real; esto contradice la existencia de un valor x_1 con derivada nula. La contradicción viene de suponer la existencia de una segunda raíz c_2. Por tanto, la ecuación tiene exactamente una raíz c_1 en el intervalo $(1, 2)$.
La calculamos con una cifra decimal exacta. Para ello, dividimos en intervalo $(1, 2)$ en diez partes iguales y evaluamos la función $f(x) = 2x^3 + x - 5$ en los extremos de cada subintervalo.

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \ continua \ en \ [1'2, 1'3] \\ f(1{,}2) < 0 \\ f(1{,}3) > 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_1 \in (1'2, 1'3) \ tal \ que \ f(c_1) = 0 \Leftrightarrow 2{c_1}^3 + c_1 - 5 = 0$$

Así, la única raíz es $c_1 = 1{,}2 \ldots$

4º) Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + e^x)^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{L(1+x) - senx}{x \cdot senx}$

Resolución

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + e^x)^{\frac{1}{x}} \overset{\infty^0}{=}$

$$ln\left(\lim_{x \to +\infty} (1 + e^x)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x \to +\infty} ln(1 + e^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln(1 + e^x)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty} \ L`Hôp}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty} \ L`Hôp}{=}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$\text{Así, } ln\left(\lim_{x \to +\infty} (1 + e^x)^{\frac{1}{x}}\right) = 1 \ \text{ y, por tanto, } \lim_{x \to +\infty} (1 + e^x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{L(1+x) - senx}{x \cdot senx} \overset{\frac{0}{0}, L`Hôp}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - cosx}{senx + x \cdot cosx} \overset{\frac{0}{0}, L`Hôp}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + senx}{cosx + cosx - xsenx} = -\frac{1}{2}$

5º) Una empresa está trazando parcelas iguales y rectangulares sobre el plano de un terreno para construir chalets, de $200 \ m^2$ de superficie, rectangulares también. Según la legislación de la zona, entre el chalet y la valla de la parcela debe haber un margen de $3 \ m$ en los lados verticales y un margen de $10 \ m$ en los lados horizontales. Calcula las dimensiones que deben tener las parcelas para que su área sea mínima. ¿Cuál será el área de una parcela?

Resolución

Sean x, y las longitudes de los lados del chalet, siendo x el horizontal.
Es claro que $x \cdot y = 200$ es la restricción del problema.
Al tener en cuenta los márgenes dados, $(x + 6) \cdot (y + 20)$ es el área de la parcela.

El planteamiento es: : $\left[\begin{array}{lll} minimizar & A(x,y) = (x + 6) \cdot (y + 20) & función \ objetivo \\ s.a & x \cdot y = 200 & restricción \end{array}\right.$

Despejando y de la restricción, $y = \frac{200}{x}$. Sustituyendo en la función objetivo:

$$A(x) = (x + 6) \cdot \left(\frac{200}{x} + 20\right) = 320 + \frac{1200}{x} + 20x \quad minimizar$$

Derivando, $A'(x) = \frac{-1200}{x^2} + 20$; $A'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 60 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{15} \cong 7{,}75\ m$

$A''(x) = \frac{2400}{x^3}$ y $A''(2\sqrt{15}) > 0$. Por tanto, hemos encontrado el mínimo de la función A.

Las dimensiones de la parcela que minimizan su área son:

$$x + 6 = 2\sqrt{15} + 6\ m \cong 13{,}75\ m \ ; \ \ y + 20 = \frac{200}{2\sqrt{15}} + 20\ m \cong 45{,}8\ m$$

El área mínima de la parcela es $\left(2\sqrt{15} + 6\right) \cdot \left(\frac{200}{2\sqrt{15}} + 20\right) \cong 629{,}75\ m^2$

6º) Estudia dominio, cortes con ejes, monotonía, curvatura y asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-2}$ Esboza su gráfica.

Resolución

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ porque $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Cortes con los ejes coordenados:

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} \ \ ; \begin{cases} x = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}; \quad P\left(0, -\frac{3}{2}\right) \\ y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1\,;\ Q(1,0) \\ x = 3\,;\ R(3,0) \end{cases} \end{cases}$$

Monotonía: $f'(x) = \frac{(2x-4)\cdot(x-2) - x^2 + 4x - 3}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+5}{(x-2)^2} > 0$ en su dominio. La función es creciente.

Curvatura: $f''(x) = \frac{(2x-4)\cdot(x-2)^2 - (x^2-4x+5)\cdot 2\cdot(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{-2}{(x-2)^3}$

$$f''(x) = \frac{-2}{(x-2)^3} \begin{cases} < 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2.\ (2, +\infty)\ f\ Convexa \\ > 0 \Leftrightarrow x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2.\ (-\infty, 2)\ f\ Cóncava \end{cases}$$

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4x+3}{x-2} \overset{\frac{-1}{0}}{=} \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^2-4x+3}{x-2} \overset{\frac{-1}{0^-}}{=} +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2-4x+3}{x-2} \overset{\frac{-1}{0^+}}{=} -\infty \end{cases}$$ la recta $x = 2$ es asíntota vertical.

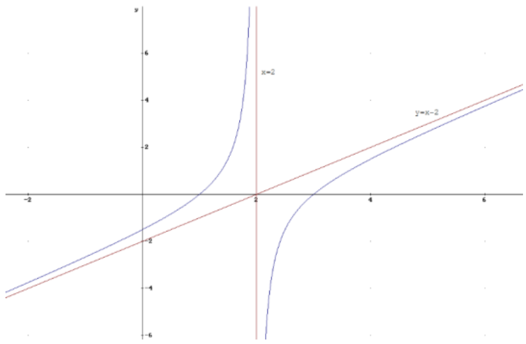
Asíntota horizontal no tiene porque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-4x+3}{x-2} = \pm\infty$

Asíntota oblicua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2-4x+3}{x-2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2-4x+3}{x-2} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x+3}{x-2} = -2$$

$y = x - 2$ es asíntota oblicua



Puntuación

1 -------------- 1 punto

2 ------------- 2 “

3, 4 ----------- 1,5 “

5, 6 ------------ 2 “