1º) Calcula una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=\frac{\sqrt{x-3}}{2}$ tal que $F(4)=-1$

Resolución

La primitiva que buscamos estará en su integral indefinida, que es racional:

$$F(x)=\int\frac{\sqrt{x-3}}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int(x-3)^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{2}\frac{(x-3)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=\frac{\sqrt{(x-3)^3}}{3}+c$$

$$F(4)=-1\Leftrightarrow\frac{1}{3}+c=-1\Leftrightarrow c=-\frac{4}{3}$$

La primitiva es $F(x)=\frac{\sqrt{(x-3)^3}-4}{3}$

2º) Calcula las siguientes integrales:

Resolución

a) $\int\frac{2-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=2arcsenx+\sqrt{1-x^2}+c$

b) $\int\frac{cosx}{3-senx}\,dx=-\int\frac{-cosx}{3-senx}\,dx=-L|3-senx|+c$

c) $\int\frac{x^2-4}{x+3}\,dx\overset{Efectuando\ división}{\cong}\int(x-3)dx+\int\frac{5}{x-3}\,dx=\frac{x^2}{2}-3x+5\ln|x+3|+c$

d) $\int\frac{x+1}{x^2-x}\,dx$ Integral racional y el denominador con raíces reales simples

$\frac{x+1}{x^2-x}=\frac{x+1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}$

Al igualar los numeradores resulta

$x+1=A(x-1)+Bx$

sustituyendo

$x=0\ ;\ 1=A(-1)=-A\ ;\ A=-1$

$x=1\ ;\ 2=B\ ;\ B=2$

$$I=\int\frac{x+1}{x^2-x}dx=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}\right)dx=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{2}{x-1}\right)dx$$

$$=\boxed{-\ln|x|+2\ln|x-1|+k}$$

e) $\int\frac{lnx}{\sqrt{x}}dx$

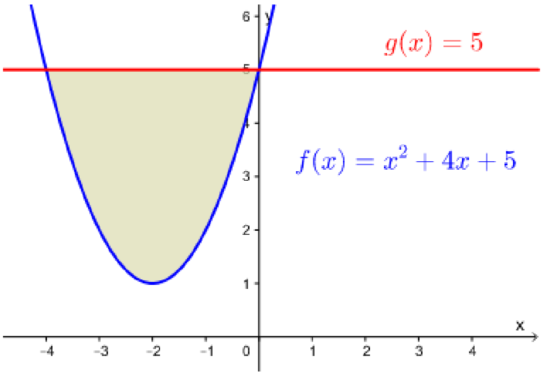
Por partes: $\left\{\begin{array}{ll} u=\ln x & ;\ du=\frac{1}{x}dx \\ dv=\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx & ;\ v=\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=2\sqrt{x}\end{array}\right\}$

$$\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx=2\sqrt{x}\ln|x|-2\int\frac{\sqrt{x}}{x}\,dx=\sqrt{x}\ln x^2-2\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=$$

$$=\sqrt{x}\ln x^2-4\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=\sqrt{x}\ln x^2-4\sqrt{x}+k=\boxed{\sqrt{x}\left(\ln x^2-4\right)+k}$$

3º) Dibuja la región del plano que limitan las gráficas de las funciones $f(x)=x^2+4x+5$ y $g(x)=5$ y calcula su área.

Resolución



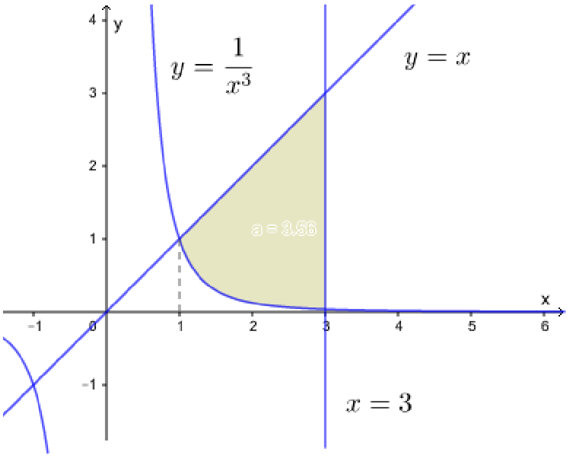
$$\text{Área} = \int_{-4}^{0} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-4}^{0} (-x^2 - 4x)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_{-4}^{0} = 0 - \left(-\frac{(-4)^3}{3} - 2(-4)^2\right) = \boxed{\frac{32}{3}\ \mathrm{u}^2}$$

4º) Considera las funciones $f(x) = \frac{1}{x^3}$ **y** $g(x) = x,$ y la recta $x = 3.$

Dibuja el recinto finito, en el primer cuadrante, limitado por las gráficas de las funciones y la recta y calcula su área.

Resolución



El área es:

$$S = \int_{1}^{3} \left(x - \frac{1}{x^3}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right]_1^3 = \frac{3^2}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} - \left(\frac{1^2}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1^2}\right) = \frac{41}{9} - 1 = \boxed{\frac{32}{9}\ \mathrm{u}^2}$$

Puntuación

1, 3 -------------- 1,25 puntos
2 ------------------ 5 “
4 ------------------ 2,5 “