1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

a) Calcula el determinante de la matriz $C = A^2 \cdot (B^t)^3$.
b) Calcula A^{86}.

Resolución

a) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2}{\cong} \begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 1$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \overset{C_3+3\cdot C_1}{\cong}) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$|C| = |A^2 \cdot (B^t)^3| = |A^2| \cdot |(B^t)^3| = |A|^2 \cdot |B^t|^3 \overset{|B|=|B^t|}{\cong} |A|^2 \cdot |B|^3 = 1 \cdot 0 = 0$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ *que es la matriz unidad.*

Así, las sucesivas potencias de la matriz A son: $A, A^2, I, A, A^2, I, \ldots$
La división entera de 86 *entre* 3 *es* 28 *y resto* 2.

$$\text{Por tanto, } A^{86} = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix}$**. Determina el valor de** a **para que el sistema** $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **tenga infinitas soluciones. Razona la contestación.**

Resolución

Al tratarse de un sistema homogéneo de 3 incógnitas, tendrá infinitas soluciones si y solo si $rg(A) < 3$, es decir si y solo si $|A| = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{vmatrix} \overset{F_2-F_3}{\cong} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ a-1 & -3 & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & a \end{vmatrix} = 3 - a$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow 3 - a = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

3º) Resuelve la ecuación matricial $X \cdot A - B = C$**, siendo**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\; y \;\; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolución

$$X \cdot A - B = C \iff X \cdot A = B + C \iff X = (B + C) \cdot A^{-1}$$

Inversa de A:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B + C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

La solución es: $X=(B+C)\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&2&2\\2&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2&2\\1&1&1\\2&-1&4\end{pmatrix}$

4º) En un supermercado tienen tres artículos con ofertas por la compra de una segunda unidad. La segunda unidad del artículo A tiene un descuento del 60 %, la segunda unidad del artículo B tiene un descuento del 75 %, mientras que la segunda unidad del artículo C se oferta con un descuento del 50 %. Si un cliente compra un artículo de cada clase y, por lo tanto, no se beneficia de descuento alguno, debe pagar 26 euros. Si compra dos artículos de cada clase pagará $35{,}20$ euros. Finalmente, si no adquiere el artículo A, pagará lo mismo comprando dos unidades de B y una de C que si compra dos unidades de C y una de B. Determínese el precio de cada artículo

Resolución

$x \equiv$ *precio unitario del articulo A*
$y \equiv$ *precio unitario del articulo B*
z≡ *precio unitario del articulo C*

Si un cliente compra un artículo de cada clase y, por lo tanto, no se beneficia de descuento alguno, debe pagar 26 euros: $x+y+z=26$

Si compra dos artículos de cada clase pagará 35,20 euros: $1{,}4x+1{,}25y+1{,}5z=35{,}20$

Si no adquiere el artículo A, pagará lo mismo comprando dos unidades de B y una de C que si compra dos unidades de C y una de B: $1{,}25y+z=y+1{,}5z$

$$\begin{cases}x+y+z=26\\1{,}4x+1{,}25y+1{,}5z=35{,}2\\0{,}25y-0{,}5z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=26\\140x+125y+150z=3520\\y-2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=26\\28x+25y+30z=704\\y-2z=0\end{cases}$$

$$y=2z\,;\,x+2z+z=26\,;\,x=26-3z$$

$$28(26-3z)+25(2z)+30z=704\Leftrightarrow 728-84z+50z+30z=704\Leftrightarrow 4z=24\Leftrightarrow z=6\,;x=8\,;y=12$$

$$x=8€\ ;\ \ y=12€\ ;\ \ z=6€$$

5º) Considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases}x-y+\ z\ =a\\2x-y+\ az\ =3a\\ax-y\ +2z\ =6\end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro a.
b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-1&a\\a&-1&2\end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^*=\begin{pmatrix}1&-1&1&a\\2&-1&a&3a\\a&-1&2&6\end{pmatrix}$

$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&-1&a\\a&-1&2\end{vmatrix}=-2-a^2-2+a+4+a=-a^2+2a$$

$|A|=0\ \Leftrightarrow\ -a^2+2a=0\ \Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\a=2\end{cases}$

Caso 1 $\forall a\in\mathbb{R}\ \ a\neq0\,,a\neq2\ \ |A|\neq0$. Por tanto $rg(A)=3=rg(A^*)=n^{\underline{o}}\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $a=0$. En este caso $|A|=0\ \ y\ \ rg(A)<3$.

Matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-1&0\\0&-1&2\end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\2&-1&0&0\\0&-1&2&6\end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix}1&-1\\2&-1\end{vmatrix}=1\neq0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A)=2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$; Por tanto $rg(A^*) = 3$

$$2 = rg(A) \neq rg(A^*) = 3: \ Sistema\ Incompatible, no\ tiene\ solución$$

Caso 3 $a = 2$. En este caso $|A| = 0 \ y \ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} \overset{C_3=2\cdot C_1}{\triangleq} 0$; Por tanto $rg(A^*) = 2$

$rg(A) = rg(A^*) = 2 < nº\ incógnitas$: $Sistema\ Compatible\ Indeterminado$.

b) Resolvemos para $a = 2$.

Observando el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} x - y \ + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 6 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$z = t$; $\begin{cases} x - y \ = 2 - t \\ 2x - y \ = 6 - 2t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, de donde $x = 4 - t$; $y = 2$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 \\ z = \ \ t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Puntuación

1 ------------- 2 puntos
2 ------------- 1 “
3 ------------- 2 “
4, 5 ---------- 2,5 “