1º) Un sistema homogéneo de tres ecuaciones con cuatro incógnitas, ¿puede tener una única solución? Razona la contestación.

Resolución

No. La matriz A de coeficientes de las incógnitas será de dimensión 3x4. Por tanto

$$rango(A) \leq 3 < nºincógnitas = 4 \quad S.C.I\ (Infinitas\ soluciones)$$

2º) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 tal que $|A| = -2$. Calcula:

a) $|-3A|$

b) $|Adj(A)|$

Resolución

$a)$ $|-3A| = (-3)^3 \cdot |A| = -27 \cdot (-2) = 54$

b) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t \Rightarrow \left(Adj(A)\right)^t = |A| \cdot A^{-1} \Rightarrow \left|\left(Adj(A)\right)^t\right| = |A|^3 \cdot |A^{-1}| = (-2)^3 \cdot |A^{-1}| = \frac{-8}{|A|} = 4$

$$|Adj(A)| = \left|\left(Adj(A)\right)^t\right| = 4$$

3º) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Determinar para qué valores de m la matriz A tiene inversa.

b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B + 2X$

Resolución

a) $A\ tiene\ inversa\ A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 2 \end{vmatrix} = m^2 - 2 \quad ; \quad m^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

$$A\ tiene\ inversa\ A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm\sqrt{2} \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

b) $m = -1.$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$AX = B + 2X \Leftrightarrow AX - 2X = B \Leftrightarrow (A - 2I)X = B \Leftrightarrow (A - 2I)^{-1}(A - 2I)X = (A - 2I)^{-1}B$$

$$X = (A - 2I)^{-1} \cdot B$$

Llamando $P = A - 2I$, tenemos que $X = P^{-1} \cdot B$

Calculamos la inversa de $P = A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Como $|P| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{F_2 - F_1}{\cong} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, existe P^{-1}

$P_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \quad ; \quad P_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \quad ; \quad P_{13} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$P_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \quad ; \quad P_{22} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \quad ; \quad P_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$P_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad ; \quad P_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad ; \quad P_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2$

Matriz adjunta de P: $Adj(P) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz inversa de P: $P^{-1} = \frac{1}{|P|} \cdot (Adj(P))^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Por tanto, $X = P^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

4º) Un estudiante pidió en la cafetería tres bocadillos, dos refrescos y dos bolsas de patatas, y pagó un total de 19 **euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron** 4 **euros.**
Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 **euros, lo que suponía un decuento del** 40% **respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?**

Resolución

x, y, z : precio unitario (€) de bocadillo (x), refresco (y), bolsa de patatas (z)

$$\begin{cases} 4x + 2y + 3z = 19 \\ x + z = 4 \\ 0{,}6x + 0{,}6y = 3 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} 4x + 2y + 3z = 19 \\ x + z = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 19 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Gauss}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$z = 1$

$y - z = 1$; $y = 1 + z = 1 + 1 = 2$

$x + z = 4$; $x = 4 - z = 4 - 1 = 3$

En resumen $\boxed{\begin{cases} x = 3 \text{ € cada bocadillo} \\ y = 2 \text{ € cada refresco} \\ z = 1 \text{ € cada bolsa de patatas} \end{cases}}$

5º) Se considera el sistema $\begin{cases} x \; - 2my \; + z = 1 \\ mx + 2y - z = -1 \\ x \;\; - y \;\; + z = 1 \end{cases}$

a) Discútase según los valores del parámetro real m**.**

b) Resuélvase para $m = \frac{1}{2}$**.**

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 & 1 \\ m & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{C2+C1 \\ C3-C1}}{\cong} \begin{vmatrix} 1 & 1-2m & 0 \\ m & 2+m & -(1+m) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2m & 0 \\ 2+m & -(1+m) \end{vmatrix} =$$
$$= (2m-1) \cdot (m+1)$$

$$|A| = 0 \iff (2m-1) \cdot (m+1) = 0 \iff \begin{cases} m = -1 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Caso 1 $\forall m \in \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ $|A| \neq 0$. Por tanto $rg(A) = 3 = rg(A^*) = nº\ incógnitas$

$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$

Caso 2 $m = -1$. En este caso $|A| = 0$ y $rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$, $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{C1=C3} 0$; Por tanto $rg(A^*) = 2$

$rg(A) = rg(A^*) = 2 < nº\ incógnitas$: Sistema Compatible Indeterminado.

b) $\boldsymbol{m = \frac{1}{2}}$

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1/2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$, $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{F1=F3} 0$; Por tanto $rg(A^*) = 2$

$rg(A) = rg(A^*) = 2 < nº\ incógnitas$: Sistema Compatible Indeterminado.

Observando el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ \frac{1}{2}x + 2y - z = -1 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir y y z. La incógnita x actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$x = t$; $\begin{cases} -y + z = 1 - t \\ 2y - z = -1 - \frac{1}{2}t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, de donde $y = -\frac{3}{2}t$ y $z = 1 - \frac{5}{2}t$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{3}{2}t \\ z = 1 - \frac{5}{2}t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Puntuación

1 ------------- 1 punto
2 ------------- 2 “
3a------------- 0,75 “
3b------------- 1,25 “
4, 5 ---------- 2,5 “