A1] Se considera el sistema $\begin{cases} x - 2my + z = 1 \\ mx + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

a) Discútase según los valores del parámetro real m**.**

b) Resuélvase para $m = \frac{1}{2}$**.**

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 & 1 \\ m & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{=}{\overset{C2+C1}{\overset{C3-C1}{}}} \begin{vmatrix} 1 & 1-2m & 0 \\ m & 2+m & -(1+m) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2m & 0 \\ 2+m & -(1+m) \end{vmatrix} =$$
$$= (2m-1)\cdot(m+1)$$

$$|A| = 0 \iff (2m-1)\cdot(m+1) = 0 \iff \begin{cases} m = -1 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Caso 1 $\forall m \in \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ $|A| \neq 0$. Por tanto $rg(A) = 3 = rg(A^*) = nº\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $m = -1$. En este caso $|A| = 0\ \ y\ \ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$, $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{C1=C3} 0 \quad ; \quad \text{Por tanto } rg(A^*) = 2$$

$rg(A) = rg(A^*) = 2 < nº\ incógnitas$: Sistema Compatible Indeterminado.

b) $m = \frac{1}{2}$

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1/2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$, $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{F1=F3} 0 \qquad ; \qquad \text{Por tanto } rg(A^*) = 2$$

$rg(A) = rg(A^*) = 2 < nº\ incógnitas$: Sistema Compatible Indeterminado.

Observando el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ \frac{1}{2}x + 2y - z = -1 \end{cases}$$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir y y z. La incógnita x actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$$x = t; \quad \begin{cases} -y + z &= 1 - t \\ 2y - z = &-1 - \frac{1}{2}t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \text{ de donde } y = -\frac{3}{2}t \text{ y } z = 1 - \frac{5}{2}t$$

$$\text{La solución viene dada por} \begin{cases} x = & t \\ y = & -\frac{3}{2}t \\ z = & 1 - \frac{5}{2}t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

A2) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad en $x = 0$.

b) Estudie si $f(x)$ presenta algún tipo de simetría par o impar.

c) Calcule la siguiente integral $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}\, dx$

Resolución

a) Comprobamos condiciones de continuidad en un punto:

$f(0) = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \cdot 0 = 0$

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) \implies f(x)\ es\ continua\ en\ x = 0$$

Estudiemos la derivabilidad en $x = 0$:

$f'(x) = 3x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + x^3 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} = e^{-\frac{1}{x^2}}(3x^2 + 2)$ para $x \neq 0$

$f'(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(e^{-\frac{1}{x^2}}(3x^2 + 2) \right) = 0$ Derivable en $x = 0$

b) $f(-x) = (-x)^3 e^{-\frac{1}{(-x)^2}} = -x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} = -f(x)$ La función es impar

c) $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}\, dx = \int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}\, dx = \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{1}{x^2}}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{-1}{4}} - e^{-1}\right) = \frac{\sqrt[4]{e^3} - 1}{2e}$

A3) Con un dispositivo láser situado en el punto $P(1,1,1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases}$.
a) Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.
b) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.
c) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $\pi \equiv x + y = 2$ y la recta r.

Resolución

a) Vector director de la recta $\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k} = (1,2,1)$

Para $z = 0$, se tiene $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ x = -90 \end{cases}$ de donde $x = -90$ e $y = -190$. La posición de la partícula es el punto $Q(-90,-190,0)$

b) Se trata de hallar la distancia del punto P a la recta r:

$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{36481 + 8281}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{22381}{3}}$$

$\overrightarrow{PQ} = (-91,-191,-1)$; $\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -91 & -191 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-191, 91, 9)$

c) El vector normal del plano es $\vec{n} = (1,1,0)$ y $\vec{n} \cdot \vec{u} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3$

$sen(\widehat{r,\pi}) = |\cos(\widehat{\vec{n},\vec{u}})| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow (\widehat{r,\pi}) = 60°$

A4) Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el IBEX-35 fue del 27,7%. Se reunieron 10 de estos consejeros.
a) Halla la probabilidad de que la mitad fuesen mujeres.
b) Calcule la probabilidad de que al menos hubiese un hombre.
c) Determine, aproximando por una normal, la probabilidad de que en un congreso de 200 de estos consejeros de estas empresas hubiese como mínimo un 35% de representación femenina.

Resolución

Sea el suceso $A =$ "*El consejero es mujer*". Sabemos que, elegido un consejero al azar, $p(A) = 0{,}277$
Consideremos la variable aleatoria $X =$ "*Número de consejeros mujeres*". $X \hookrightarrow B(10;\ 0{,}227)$

a) $p(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot\ 0{,}277^5 \cdot 0{,}723^5$

b) $p(X \le 9) = 1 - p(X = 10) = 1 - \binom{10}{10} \cdot\ 0{,}277^{10} = 1 - 0{,}277^{10}$

c) $n = 200$; $X \hookrightarrow B(200;\ 0{,}227) \hookrightarrow N(55{,}4;\ 6{,}33)$; $Z \hookrightarrow N(0,1)$

$$p(X \ge 70) = 1 - p(X < 70) = 1 - p\left(Z < \frac{70 - 55{,}4}{6{,}33}\right) = 1 - p(Z < 2{,}31) = 1 - 0{,}9896 = 0{,}0104$$

B1)

Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio Pablo recibe 420 euros más que Alicia, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

Resolución

Sean $x = edad\ de\ Pablo$; $y = edad\ de\ Alejandro$; $z = edad\ de\ Alicia$
Del enunciado obtenemos fácilmente $x + y + z = 45$ y $x + y = 2z + 3$
Al tratarse de un reparto proporcional a la edad, lo que corresponde a cada uno es:
Pablo: $\frac{9450}{45}x = 210x$; Alejandro: $\frac{9450}{45}y = 210y$; Alicia: $\frac{9450}{45}z = 210z$

Tenemos que resolver el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+z=45 \\ x+y=2z+3 \\ 210x=210z+420 \end{cases}$ equivalente a

$\begin{cases} x+y+z=45 \\ x+y-2z=3 \\ x \quad\quad -z=2 \end{cases}$ De la segunda y primera ecuación, $3+2z+z=45$; $3z=42$; $z=14\ años$

Así, $x=16\ años\ e\ \ y=15\ años$

B2)

Sea la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

a) (0.5 puntos) Compruebe si $f(x)$ verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-1,1]$.

b) (1 punto) Calcule y clasifique los extremos relativos de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

c) (1 punto) Determine el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-1,1]$.

Resolución

a) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, es continua en $\mathbb{R}$ por ser cociente de continuas y $x^2+1\neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\ continua\ en\ [-1,1] \\ f(-1)=-\dfrac{1}{2}<0 \\ f(1)=\dfrac{1}{2}>0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c\in(-1,1)\ tal\ que\ f(c)=0$$

b) $f`(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ ; $f`(x)=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$ (puntos críticos)

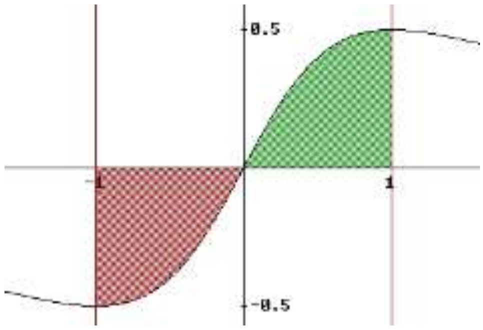
$$f''(x)=\frac{-2x\cdot(x^2+1)^2-(1-x^2)\cdot 2\cdot 2x\cdot(x^2+1)}{(x^2+1)^4}=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(-1)=\frac{1}{2}>0 \Longrightarrow Mínimo\ relativo\ en\ el\ punto\ P\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$$

$$f''(1)=-\frac{1}{2}<0 \Longrightarrow Máximo\ relativo\ en\ el\ punto\ P\left(1,\frac{1}{2}\right)$$

c) La función es impar, por tanto

$$Área=2\cdot\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx=[ln(x^2+1)]_0^1=ln2\ \ u^2$$



B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi\equiv x+y+z=1$, la recta $r_1\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda, \\ z=-1 \end{cases}$ $\lambda\in\mathbb{R}$ y el punto $P(0,1,0)$.

a) (0.5 puntos) Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.

b) (0.75 puntos) Halle una ecuación de la recta contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a r_1.

c) (1.25 puntos) Calcule una ecuación de la recta, r_2, que pase por P y sea paralela a r_1. Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2.

Resolución

a) Un punto genérico de la recta es $P(1+\lambda,1-\lambda,-1)$

Como $1+\lambda+1-\lambda-1=1$, se tiene que cualquier punto de la recta satisface la ecuación del plano y, por tanto, la recta está contenida en el plano.

Por otro lado, el punto $P(0,1,0)$ satisface también la ecuación del plano y, en consecuencia, pertenece al plano.

b) Hallamos el plano π_1 perpendicular a r que pase por P. El vector de dirección de la recta r_1 es $\vec{u}=(1,-1,0)$ y será el normal del plano: $\pi_1 \equiv x-y+D=0$. Como pasa por el punto P, se tiene que

$0-1+D=0$, de donde $D=1$. Así el plano buscado es $\pi_1 \equiv x-y+1=0$.

La recta que buscamos es la intersección de los planos π y π_1: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+1=0 \end{cases}$

c) La recta r_2 tendrá la dirección de r_1 y como pasa por P su ecuación es $r_2 \equiv \begin{cases} x= \quad \mu \\ y=1-\mu \\ z=0 \end{cases} \forall \mu \in \mathbb{R}$

Para hallar el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2 necesitamos conocer la distancia entre ellas:

$$d(r_1,r_2)=d(P,r_1)=\frac{|\overrightarrow{PQ}\wedge\vec{u}|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}\ u$$

Q es un punto de r_1: $Q(1,1,-1)$ para $\lambda=0$; $\overrightarrow{PQ}=(1,0,-1)$; $\overrightarrow{PQ}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(-1,-1,-1)$

El área del cuadrado es $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=\frac{3}{2}\ u^2$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.

b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.

c) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

Resolución

Consideramos los sucesos siguientes:

$B_1=$ "*El primer sombrero es blanco*" ; $p(B_1)=\frac{2}{3}$; $p(\overline{B_1})=\frac{1}{3}$

$PB=$ "*El pañuelo es blanco*" ; $PN=$ El pañuelo es negro; $PC=$ "*El pañuelo es de cuadros*"

a) $p\big((B_1\cap PN)\cup(B_1\cap PC)\cup(\overline{B_1}\cap PB)\cup(\overline{B_1}\cap PC)\big)=$

$$p(B_1\cap PN)+p(B_1\cap PC)+p(\overline{B_1}\cap PB)+p(\overline{B_1}\cap PC)=$$

$$=p(B_1)\cdot p(PN|B_1)+p(B_1)\cdot p(PC|B_1)+p(\overline{B_1})\cdot p(PB|\overline{B_1})+p(\overline{B_1})\cdot p(PC|\overline{B_1})=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{14}{27}+\frac{1}{5}=\frac{97}{135}$$

b) $p($"En al menos uno de los complementos aparezca el color negro"$)=$

1-p(“EL sombrero es blanco y el pañuelo también)= $1-p(B_1\cap PB)=1-p(B_1)\cdot p(PB|B_1)=$

$$1-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9}=1-\frac{4}{27}=\frac{23}{27}$$

c)

$$p(\overline{B_1}|PC) \overset{Bayes}{=} \frac{p(\overline{B_1}) \cdot p(PC|\overline{B_1})}{p(PC)} = \frac{p(\overline{B_1}) \cdot p(PC|\overline{B_1})}{p(B_1) \cdot p(PC|B_1) + p(\overline{B_1}) \cdot p(PC|\overline{B_1})} =$$

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{10}{27} + \frac{2}{15}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{68}{135}} = \frac{270}{1020} = \frac{54}{204} = \frac{27}{102} = \frac{9}{34}$$

Del enunciado, $p(R) = \frac{1}{3}$; $p(\bar{R}) = \frac{2}{3} p(P|R) = p(\bar{P}|R) = 0{,}5$; $p\left(P|\bar{\bar{R}}\right) = 0{,}25$; $p\left(\bar{P}|\bar{\bar{R}}\right) = 0{,}75$

a) $p(P) \overset{P.Total}{\widehat{=}} p(R) \cdot p(P|R) + p(\bar{R}) \cdot p(P|\bar{R}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

b) $p(\bar{R}|\bar{P}) \overset{T.Bayes}{\widehat{=}} \frac{p(\bar{R} \cap \bar{P})}{p(\bar{P})} = \frac{p(\bar{R}) \cdot p(\bar{P}|\bar{R})}{1 - p(P)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$