**1º) En una fábrica de artículos deportivos se dispone de 10 cajas de diferentes tamaños, grandes, medianas y pequeñas, para envasar las camisetas de atletismo producidas, con capacidad para 50, 30 y 25 camisetas respectivamente. Si una caja grande fuera mediana, entonces habría el mismo número de grandes y de medianas. En total se envasan 390 camisetas. Determina el número de cajas que hay de cada clase.**

**Resolución**

$x \equiv número\ de\ cajas\ grandes;\ y \equiv número\ de\ cajas\ medianas;\ z \equiv número\ de\ cajas\ pequeñas$

El sistema de ecuaciones lineales es $\begin{cases} x+y+z=10 \\ x-1=y+1 \\ 50x+30y+25z=390 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=10 \\ x-y=2 \\ 50x+30y+25z=390 \end{cases}$

que resolvemos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 50 & 30 & 25 & 390 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & -20 & -25 & -110 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -15 & -30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} x+y+z=10 \\ -2y-z=-8 \\ -15z=-30 \end{cases}$ de donde $z=2\ ;\ y=3\ ;\ x=5$

Hay 5 cajas grandes, 3 medianas y 2 pequeñas

**2º) Considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real $a$:**

$$\begin{cases} x-y+z=a \\ 2x-y+az=3a \\ ax-y+2z=6 \end{cases}$$

**a) Discute el sistema según los valores del parámetro** a.

**b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.**

**Resolución**

Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & -1 & a & 3a \\ a & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix}=-2-a^2-2+a+4+a=-a^2+2a$$

$|A|=0 \Leftrightarrow -a^2+2a=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$

**Caso 1** $\forall a \in \mathbb{R}\ a \neq 0, a \neq 2\ |A| \neq 0$. Por tanto $rg(A)=3=rg(A^*)=nº\ incógnitas$

$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$

**Caso 2** $a=0$. En este caso $|A|=0\ y\ rg(A)<3$.

Matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1 \neq 0$, en $A$ hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A)=2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada $A^*$:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de $A^*$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \quad ; \quad \text{Por tanto } rg(A^*) = 3$$

$$2 = rg(A) \neq rg(A^*) = 3: \quad \textit{Sistema Incompatible, no tiene solución}$$

**Caso 3** $a = 2$. En este caso $|A| = 0$ $y$ $rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ , en $A$ hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada $A^*$:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ , que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de $A^*$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} \overset{C_3 = 2 \cdot C_1}{\cong} 0 \quad ; \quad \text{Por tanto } rg(A^*) = 2$$

$rg(A) = rg(A^*) = 2 < n^{\underline{o}}\ incógnitas$: *Sistema Compatible Indeterminado.*

b) Resolvemos para $a = 2$.

Observando el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz $A$, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 6 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz $A$, es decir $x$ e $y$. La incógnita $z$ actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$$z = t; \quad \begin{cases} x - y = 2 - t \\ 2x - y = 6 - 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{de donde} \quad x = 4 - t \ ; \ y = 2$$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 \\ z = \ t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

**3º) Se tienen** 20 **metros de marco metálico para construir una valla publicitaria rectangular. El terreno donde se quiere instalar la valla es fangoso y al colocarla se hunde una altura** $h$ **que es la quinta parte de la anchura de la valla. Calcula las medidas de la valla de forma que el área visible (sombreada en la figura) sea máxima.**


**Resolución**

$x$ : anchura de la valla

$y$ : altura de la valla

$2x + 2y = 20$ ; $y = 10 - x$

área sombreada: $S = x\left(10 - x - \frac{1}{5}x\right) = x\left(10 - \frac{6}{5}x\right)$

$S(x) = 10x - 1{,}2x^2$

$S'(x) = 10 - 2{,}4x$ ; $S'(x) = 0$ ; $10 - 2{,}4x = 0$ ; $x = \frac{10}{2{,}4} = \frac{25}{6} \approx 4{,}167$ m

$y = 10 - x = 10 - \frac{25}{6} = \frac{35}{6} \approx 5{,}833$ m

$S''(x) = -2{,}4 < 0$ por lo que se trata, efectivamente, de un máximo del área visible.

En resumen $\boxed{\begin{cases} x = \frac{25}{6} \approx 4{,}167 \text{ m} \\ y = \frac{35}{6} \approx 5{,}833 \text{ m} \end{cases}}$

**4º) Se considera la función real de variable real definida por** $f(x)=\begin{cases} L(2-x)+a & si\ \ x\le 1 \\ \frac{a(x+1)^2}{2}+b & si\ \ x>1 \end{cases}$

**a) Calcula los valores de los parámetros reales $a$ y $b$ para que sea derivable en $x=1$.**
**b) Para $a=3$, halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x=-2$**

**Resolución**

**Continuidad en $x=1$**

1º) $f(1)=L1+a=a$

2º) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-}(L(2-x)+a)=a \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{a(x+1)^2}{2}+b\right)=2a+b \end{cases}$ $\quad \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) \Leftrightarrow a+b=0$

Por tanto $f(x)$ es continua si y solo si $a+b=0$

**Derivabilidad en $x=1$**

$f'(x)=\begin{cases} \frac{-1}{2-x} & si\ \ x<1 \\ a(x+1) & si\ \ x>1 \end{cases}$ Si $a+b=0$ entonces $\begin{cases} f'(1)^-=-1 \\ f'(1)^+=2a \end{cases}$ de donde concluimos:

$$f(x) \text{ derivable en } x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 2a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}\ \ y\ \ b=\frac{1}{2}$$

b) Teniendo en cuenta que $f(-2)=L4+3$ y que $f'(-2)=-\frac{1}{4}$, la ecuación de la recta tangente en el punto $P(-2,L4+3)$ es:

$$t\equiv y-L4-3=-\frac{1}{4}(x+2) \Leftrightarrow t\equiv y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}+2L2$$

**5º)**

**a) Dibuja la región comprendida entre las gráficas de las funciones $f$ y $g$ y calcula su área.**

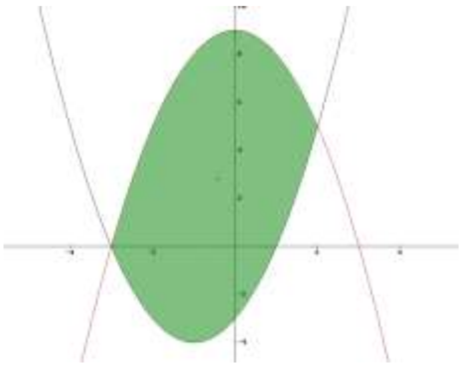
$$f(x)=-x^2+9 \quad \text{y} \quad g(x)=(x+1)^2-4$$

**b) Calcula** $\int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}-\frac{2}{(1+5x)^2}\right)dx$

**Resolución**

a) Calculamos los puntos de corte entre ambas funciones:

$$-x^2+9=(x+1)^2-4 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=2 \end{cases}$$



El área buscada es $A=\int_{-3}^{2}(f-g)\,dx=\int_{-3}^{2}(-2x^2-2x+12)\,dx=\left[\frac{-2x^3}{3}-x^2+12x\right]_{-3}^{2}=\frac{125}{3}u^2$

b) $\int_0^1\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2}{(1+5x)^2}\right)dx \overset{[1]}{=} \left[\frac{x^4}{12}+\frac{2}{5\cdot(1+5x)}\right]_0^1=\frac{1}{12}+\frac{1}{15}-\frac{2}{5}=\frac{5+4-24}{60}=-\frac{15}{60}=-\frac{1}{4}$

$\int\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2}{(1+5x)^2}\right)dx\text{c})=\int\frac{x^3}{3}dx-\int\frac{2}{(1+5x)^2}dx=\frac{1}{3}\cdot\int x^3dx-\frac{2}{5}\cdot\int(1+5x)^{-2}\cdot 5\,dx=\frac{x^4}{12}+\frac{2}{5\cdot(1+5x)}+c$ [1]

**6º) Un día determinado, en una tienda de ropa joven, se han realizado 400 ventas pagadas con la tarjeta de crédito V y 350 ventas pagadas con la tarjeta MC. Las ventas restantes del día han sido abonadas en metálico. Se comprueba que 150 de las ventas pagadas con la tarjeta de crédito V superan los 150 euros, mientras que 300 de las ventas pagadas con MC superan esa cantidad. Se extrae al azar un comprobante de las ventas del día pagadas con tarjeta de crédito.**

**a) Cuál es la probabilidad de que corresponda a una compra superior a 150 euros?**
**b) Si la compra supera 150 euros, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido pagada con la tarjeta MC?**

**Resolución**

$V = \text{"}Pagar\ con\ tarjeta\ de\ crédito\ V\text{"}\ ;\ p(V) = \frac{400}{750} = \frac{8}{15}$

$MC = \text{"}Pagar\ con\ tarjeta\ de\ crédito\ MC\text{"}\ ;\ p(MC) = \frac{350}{750} = \frac{7}{15}$

$S = \text{"}La\ venta\ supera\ los\ 150\ euros\text{"}\ ;\ p(S|V) = \frac{150}{400} = \frac{3}{8}; p(S|MC) = \frac{300}{350} = \frac{6}{7}$

a)

$$\boldsymbol{p(S)} = p(V)\cdot p(S|V) + p(MC)\cdot p(S|MC) = \frac{8}{15}\cdot\frac{3}{8} + \frac{7}{15}\cdot\frac{6}{7} = \boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

b)

$$\boldsymbol{p(MC|S)} \overset{Bayes}{\triangleq} \frac{p(MC)\cdot p(S|MC)}{p(S)} = \frac{\frac{7}{15}\cdot\frac{6}{7}}{\frac{3}{5}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

**7º) Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio de 45% de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.**
**a) Expresa como calcular la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.**
**b) Calcula dicha probabilidad aproximándola por una normal.**

**Resolución**

a) X = El número de días que ha llovido en 100 días.
Es una variable binomial pues la probabilidad de que llueva un día es independiente de lo que pasó el días anteriores o posteriores.
La probabilidad de que llueva es siempre p = 0.45, de que no llueva es q = 0.55, el número de repeticiones es n = 100.

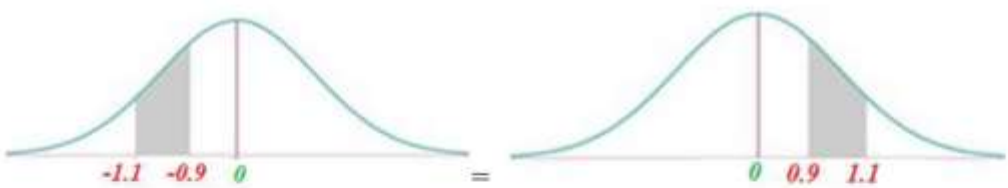
X = B(100, 0.45)

$$P(X=40) = \binom{100}{40}0.45^{40}\cdot 0.55^{60} = \frac{100!}{40!\cdot 60!}0.45^{40}\cdot 0.55^{60}$$

b) Como n · p = 100 · 0.45 = 45 > 5 y n · q = 100 · 0.55 > 5 aproximamos los valores de la probabilidad de la binomial mediante una normal de media $\mu = np = 100\cdot 0.45 = 45$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100\cdot 0.45\cdot 0.55} \simeq 4.975$

X variable binomial se aproxima con una variable normal Y = N(45, 4.975)

$$P(X=40) = P(39.5 \le Y \le 40.5) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{39.5-45}{4.975} \le Z \le \frac{40.5-45}{4.975}\right) =$$
$$= P(-1.1 \le Z \le -0.9) = P(0.9 \le Z \le 1.1) =$$
$$= P(Z \le 1.1) - P(Z \le 0.9) = 0.8643 - 0.8159 = \boxed{0.0484}$$




**8º) Dada la recta** $r \equiv x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{3}$ **y el plano** $\pi \equiv x - y + z = 0$ se pide:

**a) Determina la posición relativa de** $r$ **y** $\pi$ **.**

**b) Halla el ángulo que forman $r$ y $\pi$.**
**c) La ecuación de la recta simétrica de la recta $r$ respecto del plano $\pi$.**

**Resolución**

a) Consideramos el sistema de ecuaciones dado por el plano y la recta en paramétricas:

$$\begin{cases} x-y+z=0 \implies 1+t-3t+1+3t=0 \implies t=-2 \\ x=1+t \\ y=\quad 3t \\ z=1+3t \end{cases}$$

La recta y el plano se cortan en el punto de coordenadas $H(-1,-6,-5)$

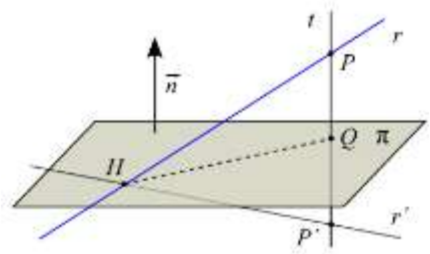
b) Vector director de la recta $\vec{u}=(1,3,3)$. Vector normal del plano $\vec{n}=(1,-1,1)$

$$sen(\widehat{r,\pi})=|\cos(\widehat{\vec{n},\vec{u}})|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|}=\frac{|1-3+3|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{19}}=\frac{\sqrt{57}}{57}\cong 0{,}1325 \implies (\widehat{r,\pi})=7{,}61°$$

c) Tomo el punto $P(1,0,1)$ de la recta $r$ y calculo su simétrico $P'$ respecto del plano $\pi$

1.- Recta $t$ perpendicular al plano que pasa por $P$:

$$t\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\quad -\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases} \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$




2.- Intersección de la recta $t$ y el plano $\pi$, $Q=t\cap\pi$

$$\begin{cases} x-y+z=0 \implies 1+\lambda+\lambda+1+\lambda=0 \implies \lambda=-2/3 \\ x=1+\lambda \\ y=\quad -\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases} \qquad Q\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

3.- El punto $Q$ es medio entre $P$ y su simétrico $P'(x,y,z)$

$$\tfrac{1+x}{2}=\tfrac{1}{3}\implies x=-\tfrac{1}{3}\ ;\ \tfrac{y}{2}=\tfrac{2}{3}\implies y=\tfrac{4}{3}\ ;\ \tfrac{1+z}{2}=\tfrac{1}{3}\implies z=-\tfrac{1}{3}\ ;\ P'(-\tfrac{1}{3},\tfrac{4}{3},-\tfrac{1}{3})$$

4.- La recta $r'$simétrica de $r$ pasa por los puntos $P'(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3})$ y $H(-1,-6,-5)$.

$r'(H,\overrightarrow{P'H})$ ; $\overrightarrow{P'H}=\left(-\frac{2}{3},-\frac{22}{3},-\frac{14}{3}\right)$ Tomo vector director $-\frac{3}{2}\overrightarrow{P'H}$=(1, 11, 7)

$$r'\equiv\frac{x+1}{1}=\frac{y+6}{11}=\frac{z+5}{7}$$