1º) La recta perpendicular desde el punto $A(1,1,0)$ y a un cierto plano π corta a éste en el punto $B\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
a) Calcula la ecuación de π.
b) Halla la distancia del punto A a su simétrico A' respecto del plano π.

Resolución

a) El vector $\overrightarrow{AB}=\left(0,\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$ es perpendicular al plano. Tomo $2\overrightarrow{AB}=\vec{n}=(0,-1,1)$ como vector normal del plano.

Así, el plano será $\pi\equiv -y+z+D=0$. Como pasa por el punto B, se tiene que

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+D=0, \text{ de donde } D=0$$

El plano es $\pi\equiv y-z=0$

b. A' : punto simétrico de A respecto del plano π

B es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$, por lo que:

$$d(A,A')=2d(A,B)=2\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\sqrt{0^2+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}=\boxed{\sqrt{2}\,\mathrm{u}}$$

2º) Se consideran los puntos $P(2,1,-1), Q(1,4,1) y\ R(1,3,1)$.
a) Comprobar que no están alineados y halla el área del triángulo que determinan.
b) Halla la distancia del punto P a la recta que pasa por los puntos Q y R.

Resolución

a. $P=(2,1,-1)\,,Q=(1,4,1)\ ,\ R=(1,3,1)$

$\overrightarrow{PQ}=(-1,3,2)\ ,\ \overrightarrow{PR}=(-1,2,2)$

área del triángulo ABC

$$\text{área}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}|(2,0,1)|=\boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Por lo tanto, los puntos no están alineados.

b) Considerando la base del triángulo como $\left|\overrightarrow{QR}\right|$ se tiene que:

$$\overrightarrow{QR}=(0,-1,0)\ y\ d(Q,R)=\left|\overrightarrow{QR}\right|=\sqrt{1}=1$$

$$altura=d\big(P,r(Q,R)\big)=\frac{2\cdot área}{\left|\overrightarrow{QR}\right|}=\sqrt{5}$$

También se puede hacer de la siguiente forma:

$$d\big(P,r(Q,R)\big)=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\wedge\overrightarrow{QR}\right|}{\left|\overrightarrow{QR}\right|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix}^2}}{1}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

3º) Dadas las rectas $r\equiv\begin{cases}2x-y=5\\ y+z=-1\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}x+2y-3z+1=0\\ 2x+5y+z+2=0\end{cases}$

a) Expresa la recta r en forma paramétrica.
b) Halla la ecuación de la recta t que pasa por el origen de coordenadas y se apoya en ambas.

c) Halla el punto de apoyo de la recta t en r.
Resolución

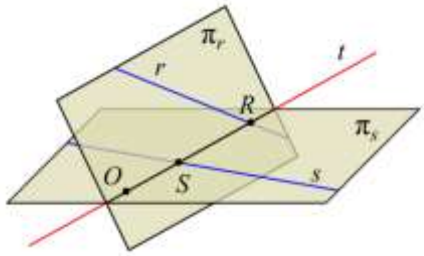
a) Vector director $\vec{u}$ de la recta r: $\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2k = (-1, -2, 2)$

Punto de r: Haciendo $y = 0$, obtenemos $A\left(\frac{5}{2}, 0, -1\right)$

Ecuaciones paramétricas de la recta $r \equiv \begin{cases} x = \frac{5}{2} - \lambda \\ y = \quad -2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$

b)

Plano π_r que contiene a r y pasa por $O(0.0, 0)$:



1.- Haz de planos que contiene a r:

$$2x - y - 5 + \lambda(y + z + 1) = 0$$

2.- De ellos el que pasa por O: $-5 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 5$

$\pi_r \equiv 2x - y - 5 + 5(y + z + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \pi_r \equiv 2x + 4y + 5z = 0$$

Plano π_s que contiene a s y pasa por $O(0.0, 0)$:

1.- Haz de planos que contiene a s:

$$x + 2y - 3z + 1 + \lambda(2x + 5y + z + 2) = 0$$

2.- De ellos el que pasa por O: $1 + 2\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{-1}{2}$

$$\pi_s \equiv x + 2y - 3z + 1 - \frac{1}{2}(2x + 5y + z + 2) = 0 \Leftrightarrow \pi_s \equiv y + 7z = 0$$

La ecuación de la recta t que pasa por el origen de coordenadas y se apoya en r y s es:

$$t \equiv \begin{cases} 2x + 4y + 5z = 0 \\ \quad y + 7z = 0 \end{cases}$$

c) Punto R, intersección de las rectas r y t:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 5z = 0 \\ \qquad y + 7z = 0 \;\Longrightarrow -2\lambda + 7(-1 + 2\lambda) = 0 \Longrightarrow 12\lambda = 7 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{7}{12} \\ x = \dfrac{5}{2} - \lambda \\ y = \quad -2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

$$\text{Así, } x = \frac{5}{2} - \frac{7}{12} = \frac{23}{12} \;\; ; \;\; y = \frac{-7}{6} \;\; ; \;\; z = -1 + \frac{7}{6} = \frac{1}{6}$$

El punto buscado es $R\left(\frac{23}{12}, \frac{-7}{6}, \frac{1}{6}\right)$

4º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x \quad - z + 1 = 0 \end{cases}$

a) Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos $\pi_1 \equiv 3x + 4y - 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv 4x - 3z - 1 = 0$.

b) Estudia la posición relativa de las rectas r y s y calcula la distancia entre ellas.

Resolución

a)

$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$; $r: (1+2t,\ -1+3t,\ -2+2t)$, $(t \in \mathbb{R})$

$\pi_1: 3x+4y-1=0$, $\pi_2: 4x-3z-1=0$

$P = (1+2t,\ -1+3t,\ -2+2t)$ punto genérico de la recta r

$d(P,\ \pi_1) = d(P,\ \pi_2)$

$$\frac{|3(1+2t)+4(-1+3t)-1|}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}} = \frac{|4(1+2t)-3(-2+2t)-1|}{\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}}$$

$\frac{|18t-2|}{5} = \frac{|2t+9|}{5}$; $|18t-2| = |2t+9|$; $18t-2 = \pm(2t+9)$

1er caso

$18t-2 = 2t+9$; $16t = 11$; $t = \frac{11}{16}$

$$P_1 = \left(1+2\tfrac{11}{16},\ -1+3\tfrac{11}{16},\ -2+2\tfrac{11}{16}\right) = \boxed{\left(\tfrac{38}{16}, \tfrac{17}{16}, -\tfrac{10}{16}\right)}$$

2º caso

$18t-2 = -2t-9$; $20t = -7$; $t = -\frac{7}{20}$

$$P_2 = \left(1+2\left(-\tfrac{7}{20}\right),\ -1+3\left(-\tfrac{7}{20}\right),\ -2+2\left(-\tfrac{7}{20}\right)\right) = \boxed{\left(\tfrac{6}{20}, -\tfrac{41}{20}, -\tfrac{54}{20}\right)}$$

b) Tomo $P(1,-1,-2)$ y $\vec{u} = (2,3,2)$ punto y vector director de la recta r.

Tomo $Q(0,0,1)$ y $\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}+\vec{j}+2\vec{k} = (1,1,2)$ punto y vector director de s.

Como $rg(\vec{u},\vec{v}) = rg\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$, al ser $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, r y s se cortan o se cruzan.

Como $rg(\overrightarrow{PQ},\vec{u},\vec{v}) = rg\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$, al ser $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, se tiene que las rectas se cruzan.

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k} = (4,-2,-1)$; $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = \sqrt{4^2+(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{21}$

$|[\overrightarrow{PQ},\vec{u},\vec{v}]| = \left\| \begin{matrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \right\| = |-9| = 9$

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{PQ},\vec{u},\vec{v}]|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} = \frac{9}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$$

5º) Dados el punto $A(1,0,-1)$, la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 2+2\lambda \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x+y-z=6$ se pide:

a) Hallar el ángulo que forma el plano π y el plano perpendicular a la recta que pasa por el punto A.
b) Determina la distancia entre la recta r y el plano π.
c) Calcula una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π.

Resolución

a) Hallamos la ecuación del plano π´ perpendicular a la recta r que pasa por el punto $A(1,0,-1)$.

Al ser perpendicular a la recta su vector normal es el director de la recta $\vec{u_r}=(1,1,2)$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n'}=\vec{u_r}=(1,1,2)\\ A(1,0,-1)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi'\equiv x+y+2z+D=0\\ A(1,0,-1)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow 1+0-2+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=1\Rightarrow\boxed{\pi'\equiv x+y+2z+1=0}$$

Hallamos el ángulo que forman los planos π y π´ hallando el ángulo que forman sus vectores normales.

$$\left.\begin{array}{l}\pi\equiv x+y-z-6=0\\ \pi'\equiv x+y+2z+1=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\vec{n}=(1,1,-1)\\ \vec{n'}=(1,1,2)\end{array}\right\}\Rightarrow(\pi,\pi')=(\vec{n},\vec{n'})=\arccos\left(\frac{\vec{n}\cdot\vec{n'}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n'}|}\right)$$

$$(\pi,\pi')=\arccos\left(\frac{(1,1,-1)\cdot(1,1,2)}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+2^2}}\right)=\arccos\left(\frac{1+1-2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}\right)=\arccos(0)$$

$$(\pi,\pi')=90^{\circ}$$

Los planos son perpendiculares.

b) Estudiemos la posición relativa de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l}r\equiv x-1=y+1=\dfrac{z-2}{2}\\ \pi\equiv x+y-z=6\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\vec{u_r}=(1,1,2)\\ \vec{n}=(1,1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{u_r}\cdot\vec{n}=(1,1,2)(1,1,-1)=1+1-2=0$$

Vector director de la recta r y vector normal del plano son perpendiculares, por lo que recta y plano son paralelos.
La distancia de la recta al plano es la distancia de cualquier punto de la recta al plano.

$$\left.P_r(1,-1,2)\in r\right\}\Rightarrow d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\frac{|1-1-2-6|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\boxed{\frac{8}{\sqrt{3}}u}$$

c) Una recta s que no corte el plano π debe ser una recta paralela a π. Por lo que el vector director de la recta s es perpendicular al vector normal del plano $\vec{n}=(1,1,-1)$.

Además, es perpendicular a la recta r, por lo que también es perpendicular al vector director $\overrightarrow{u_r}=(1,1,2)$ de la recta r.

Un vector director de la recta s puede ser el producto vectorial de $\vec{n}$ y $\overrightarrow{u_r}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=(1,1,-1)\\ \overrightarrow{u_r}=(1,1,2)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{v_s}=\vec{n}\times\overrightarrow{u_r}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=(3,-3,0)$$

Hallamos la ecuación de la recta s con vector director $\overrightarrow{v_s}=(3,-3,0)$ y que pasa por el punto $A(1,0,-1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_s}=(3,-3,0)\\ A(1,0,-1)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{s\equiv\frac{x-1}{3}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{0}}$$

Puntuación

1, 2 ---------- 1,5 puntos
3 ------------- 2 “
4, 5 ---------- 2,5 “