1º) Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix}3 & -a & 2\\ 2 & -5 & 3\\ 1 & 3 & 1-a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

a) Discútase el sistema $M\cdot X=B$ según los distintos valores del parámetro a y resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

b) Para $a=0$, resuelve la ecuación matricial $YM=I$ siendo I la matriz unidad de orden 3.

Resolución

a)

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix}3 & -a & 2\\ 2 & -5 & 3\\ 1 & 3 & -(a-1)\end{matrix}}_{M}\left|\begin{matrix}a-1\\ 1\\ 0\end{matrix}\right.\right);\quad \begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=5\neq 0\Rightarrow \text{rango } M\geq 2$$

$$|M| = -2a^2+14a-20=-2(a-2)(a-5)$$

$$\boxed{\forall a\neq 2\,,\,5\,;\ \text{rango } M=\text{rango } M'=3:\text{sistema compatible determinado}}$$

$\boxed{a=2}$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix}3 & -2 & 2\\ 2 & -5 & 3\\ 1 & 3 & -1\end{matrix}}_{M}\left|\begin{matrix}1\\ 1\\ 0\end{matrix}\right.\right);\quad \begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=0\,;\ \text{rango } M'=2$$

$$\boxed{\text{en conclusión: } a=2\,;\ \text{rango } M=\text{rango } M'=2\,;\ \text{sistema compatible indeterminado}}$$

solución:

eliminando la tercera ecuación y pasando "y" al segundo miembro como parámetro:

$$\left.\begin{array}{l} y=t\,;\ \left(\begin{matrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{matrix}\left|\begin{matrix}1+2t\\ 1+5t\end{matrix}\right.\right)\\ x=\frac{1}{5}\begin{vmatrix}1+2t & 2\\ 1+5t & 3\end{vmatrix}=\frac{1-4t}{5}\\ z=\frac{1}{5}\begin{vmatrix}3 & 1+2t\\ 2 & 1+5t\end{vmatrix}=\frac{1+11t}{5}\end{array}\right\}\ \boxed{\left(\frac{1-4t}{5},\,t\,,\,\frac{1+11t}{5}\right)\,,\ t\in\mathbb{R}}$$

$\boxed{a=5}$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix}3 & -5 & 2\\ 2 & -5 & 3\\ 1 & 3 & -4\end{matrix}}_{M}\left|\begin{matrix}4\\ 1\\ 0\end{matrix}\right.\right);\quad \begin{vmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & -4 & 0\end{vmatrix}=-30\neq 0\,;\ \text{rango } M'=3$$

$$\boxed{\text{en conclusión: } a=5\,;\ \text{rango } M\neq\text{rango } M'\,;\ \text{sistema incompatible}}$$

b)

$$\boldsymbol{Y=M^{-1}}=\begin{bmatrix}\frac{7}{10} & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{4}\\ -\frac{11}{20} & \frac{9}{20} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

2º) Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contiene, entre otros metales, oro y plata en las proporciones de la tabla adjunta. Se quiere obtener un lingote de 25 gramos con una proporción del 72% de oro y del 16% de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determina las cantidades x, y, z.

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Resolución

$$\begin{cases} x+y+z=25 \\ 100x+75y+60z=72\cdot 25 \\ 15y+22z=16\cdot 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=25 \\ 20x+15y+12z=360 \\ 15y+22z=400 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 20 & 15 & 12 & 360 \\ 0 & 15 & 22 & 400 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Gauss}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 0 & -5 & -8 & -140 \\ 0 & 15 & 22 & 400 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 0 & 5 & 8 & 140 \\ 0 & 0 & -10 & -100 \end{array}\right)$$

$-10z=-100$; $z=10$ g

$5y+8z=140$; $y=\frac{140-8z}{5}=\frac{140-8\cdot 10}{5}=12$ g

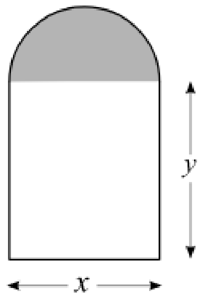
$x+y+z=25$; $x=25-y-z=25-12-10=3$ g

En resumen $\boxed{\begin{cases} x=3 \text{ g de la aleación A} \\ y=12 \text{ g de la aleación B} \\ z=10 \text{ g de la aleación C} \end{cases}}$

3º) Una ventana tiene forma de un semicírculo colocado sobre un rectángulo. El rectángulo es de cristal transparente pero el semicírculo es de cristal tintado. El cristal tintado trasmite la cuarta parte de luz por unidad de área que el cristal transparente.

a) Determina la función que proporciona la cantidad de luz que pasa por la ventana.

b) Sabiendo que el perímetro total de la ventana es de 2 metros, calcula las dimensiones x e y de la ventana que proporcionan el máximo de luz posible.



Resolución

a) $f(x,y)=x\,y+\frac{\pi}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^2$

b) el perímetro es $x+2y+\pi\frac{x}{2}=2$

despejando $\boxed{y=1-\frac{2+\pi}{4}x}$ [2 p]

sustituyendo en la expresión de f, la función a maximizar es así:

$\boxed{g(x)=-\frac{8+3\pi}{16}x^2+x}$ [2 p]

igualando a cero la derivada:

$\boxed{g'(x)=-\frac{8+3\pi}{8}x+1=0}$ [2 p]

despejando: $\boxed{x=\frac{8}{8+3\pi}}$ [2 p]

el valor correspondiente de y: $\boxed{y=\frac{4+\pi}{8+3\pi}}$ [2 p]

los valores corresponden a un máximo, pues la derivada segunda

$g''(x)=-\frac{8+3\pi}{8}$ es siempre negativa

4º)

a) Determina la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=x+xe^{-x}$ que sea paralela a la recta $y=x+3$.

b) Estudia la monotonía, extremos relativos y asíntotas de la función $y=x^2e^{-x}$

Resolución

a) $f(x) = x + x\,e^{-x}$

$y = x + 3$: pendiente $m = 1$

$f'(x) = 1 + e^{-x} - x\,e^{-x}$

$f'(x) = 1$

$1 + e^{-x} - x\,e^{-x} = 1$; $e^{-x} - x\,e^{-x} = 0$; $e^{-x}(1-x) = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 1 + 1\,e^{-1} = 1 + \frac{1}{e} = \frac{1+e}{e}$

Ecuación de la recta tangente en $x = 1$

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = 1(x-1) + \frac{1+e}{e} = x + \frac{1}{e}$; $\boxed{y = x + \frac{1}{e}}$

b) $f(x) = x^2e^{-x}$

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x} : \begin{cases} <0 & \text{si } x<0 & : f \text{ decreciente} \\ >0 & \text{si } 0<x<2 & : f \text{ creciente} \\ <0 & \text{si } x>2 & : f \text{ decreciente} \end{cases}$$

$f(0) = 0$; $f(2) = 4/e^2$

$$\text{En resumen } \boxed{\begin{cases} f \text{ decreciente en } (-\infty,0) \cup (2,+\infty) \\ f \text{ creciente en } (0,2) \\ \text{Mínimo relativo en } (0,0) \\ \text{Máximo relativo en } (2,4/e^2) \end{cases}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^2e^{-x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \ ; \ \left[\begin{array}{l}\text{Infinito del numerador de menor orden} \\ \text{que el del denominador}\end{array}\right]$$

Por tanto: $\boxed{y = 0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \to \infty}$

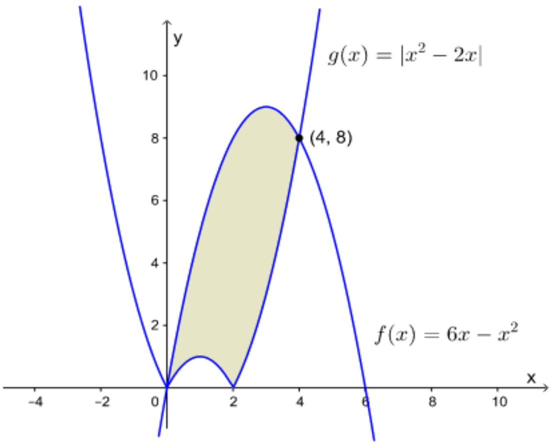
5º) Dada la función $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = |x^2 - 2x|$, se pide:

a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

b) Halla el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Resolución

a.



b. $f(x) = 6x - x^2$

$$g(x) = |x^2 - 2x| = |x(x-2)| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x<0 \\ -x^2 + 2x & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x>2 \end{cases}$$

$$S = \int_0^4 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx + \int_2^4 (f(x) - g(x))\,dx =$$

$$= \int_0^2 (6x - x^2 - (-x^2 + 2x))\,dx + \int_2^4 (6x - x^2 - (x^2 - 2x))\,dx = \int_0^2 4x\,dx + \int_2^4 (-2x^2 + 8x)\,dx =$$

$$= \left[2x^2\right]_0^2 + \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2\right]_2^4 = 8 - \frac{128}{3} + 64 + \frac{16}{3} - 16 = \boxed{\frac{56}{3}\ u^2}$$

6º) En un libro con 3 capítulos, el primero consta de 100 páginas y 15 de ellas contienen errores. El segundo capítulo, de 80 páginas, tiene 8 con errores, y en el tercero, de 50 páginas, el 80% no tiene ningún error. Se elige una página al azar del libro, halla la probabilidad de que:
a) la página contenga errores.
b) si la página contiene errores, se haya elegido del capítulo 1.
c) no esté en el capítulo 2 y no contenga errores.

Resolución

a)

Descripción de sucesos y probabilidades

$P_1:$ la página elegida es del capítulo 1 $(P'_1:$ no lo es$)$

$P_2:$ la página elegida es del capítulo 2 $(P'_2:$ no lo es$)$

$P_3:$ la página elegida es del capítulo 3 $(P'_3:$ no lo es$)$

$E:$ la página elegida contiene errores $(E':$ no lo es$)$

$p(E/P_1)=\frac{15}{100}=0{,}15\ ;\ p(E/P_2)=\frac{8}{80}=0{,}1\ ;\ p(E/P_3)=1-0{,}8=0{,}2=\frac{10}{50}$

$p(P_1)=\frac{100}{100+80+50}=\frac{100}{230}=\frac{10}{23}\ ;\ p(P_2)=\frac{80}{230}=\frac{8}{23}\ ;\ p(P_3)=\frac{50}{230}=\frac{5}{23}$

$p(E)=p(E/P_1)\cdot p(P_1)+p(E/P_2)\cdot p(P_2)+p(E/P_3)\cdot p(P_3)=0{,}15\cdot\frac{10}{23}+0{,}1\cdot\frac{8}{23}+0{,}2\cdot\frac{5}{23}=\frac{33}{230}$

b)

$$p((P_1|E)=\frac{p(P_1)\cdot p(E|P_1)}{p(E)}=\frac{\frac{10}{23}\cdot 0{,}15}{\frac{33}{230}}=\frac{15}{33}$$

c)

$p(P'_2\cap E')\underset{\text{Morgan}}{=}p((P_2\cup E)')=1-p(P_2\cup E)=1-(p(P_2)+p(E)-p(P_2\cap E))$

$p(P_2\cap E)=p(E/P_2)\cdot p(P_2)=0{,}1\cdot\frac{8}{23}=\frac{8}{230}$

$p(P'_2\cap E')=1-\left(\frac{8}{23}+\frac{33}{230}-\frac{8}{230}\right)=\boxed{\frac{125}{230}=\frac{25}{46}}$

7º) La probabilidad de que un test rápido para detectar COVID-19 dé negativo en humanos es 0,7.
a) Si hacemos test rápidos a 5 personas, halla la probabilidad de que al menos dos de ellas den negativo.
b) Si realizamos una campaña con 2100 test rápidos para detectar COVID-19, calcula la probabilidad de que den negativo por lo menos 1450 test.

Resolución

Sea el suceso $A=$ "*Un test da negativo*". $p(A)=0{,}7=p\ ;\ \ p(\bar{A})=0{,}3=q$

$X=$ "*Número de test negativos al hacer n pruebas*"

a) $n=5\ ;\ \ X\hookrightarrow B(5,0'7)$

$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-(P(X=0)+P(X=1))=1-(0.0024+\binom{5}{1}p^1q^4)=1-0.0024-0.0284=\boxed{0.9692}$

b)

Ahora tenemos $n=2100$, por lo que $X\sim Bi(2\,100,0.7)$, y nos preguntan $P(X\geq 1450)$.

Dado que $n>25$, $np=2100\cdot 0.7=1470>5$, $nq=2100\cdot 0.3=630$, entonces podemos aproximar la binomial por una distribución normal:

$X\sim Bi(2\,100,0.7)\approx N(2\,100\cdot 0.7,\sqrt{2\,100\cdot 0.7\cdot 0.3})\equiv N(1\,470,21)$.

Aplicamos la corrección de Yates, agrandando el intervalo 0.5 unidades hacia la izquierda:

$P(X_B\geq 1450)\approx P(X_N\geq 1449.5)=P\left(\frac{X_N-1470}{21}\geq\frac{1449.5-1470}{21}\right)=P(Z\geq -0.98)\overset{\text{flip}}{=}P(Z\leq 0.98)=F_Z(0.98)=\boxed{0.8365}$

8º) Dados los puntos $A(1,1,-2)$, $B(3,-1,4)$ y la recta $r\equiv\begin{cases}x=1+3\lambda\\ y=-2+5\lambda\\ z=3\end{cases}$ se pide:

a) Calcular el área del triángulo OPQ, siendo $O(0,0,0)$, P el punto medio del segmento AB y Q la intersección de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $\pi\equiv z-7=0$.
b) Halla la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a la recta r.
c) Calcula el coseno del ángulo que forma la recta r y la recta que pasa por A y por B.

Resolución

a) $P(x,y,z)$ punto medio del segmento $\overline{AB} \Longrightarrow x = \frac{1+3}{2} = 2\ ;\ y = \frac{1-1}{2} = 0\ ;\ z = \frac{-2+4}{2} = 1$

$$P(2,0,1)$$

Recta $s(A,B) = s(A,\vec{u})$ siendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2,-2,6)$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ z = -2+3t \end{cases}$$

Intersección de s y $\pi \equiv z = 7$:

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ z = -2+3t \\ z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow -2+3t = 7 \Leftrightarrow t = 3. Por\ tanto\ Q(4,-2,7\ )$$

Área del triángulo de vértices $O(0,0,0), P(2,0,1)\ y\ Q(4,-2,7\ )$:

$$Área = \frac{|\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OQ}|}{2} = \frac{\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 7 \end{matrix} \right\|}{2} = \frac{|2\vec{i} - 10\vec{j} - 4\vec{k}|}{2} = \frac{\sqrt{4+100+16}}{2} = \frac{\sqrt{120}}{2} = \sqrt{30}\ u^2$$

b) El vector normal del plano π' que buscamos será el director de la recta r: $\overrightarrow{n_{\pi'}} = \vec{v} = (3,5,0)$.

El plano será $\pi' \equiv 3x + 5y + d = 0$

Como $A(1,1,-2) \in \pi'$, se tiene que $3 + 5 + d = 0$, de donde $d = -8$.

$$\pi' \equiv 3x + 5y - 8 = 0$$

c) $\vec{u} = (2,-2,6)\ ;\ \vec{v} = (3,5,0)$

$$\cos(\widehat{r,s}) = |\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{|6-10|}{\sqrt{44}\cdot\sqrt{34}} = \frac{4\sqrt{44}\sqrt{34}}{44\cdot 34} = \frac{2\sqrt{374}}{374} \approx 0{,}1034$$