1º] Se considera el sistema $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -x + y + (a-4)z = 7 \\ 2x + 4y + 2z = 25 \end{cases}$

a) Discútase según los valores del parámetro real a.
b) Resuélvase cuando sea compatible indeterminado.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a-4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & a-4 & 7 \\ 2 & 4 & 2 & 25 \end{pmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a-4 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{C_3=C_3-C_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a-3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (3-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6-2a$$

$|A| = 0 \iff 6-2a = 0 \iff a = 3$

Caso 1 $\forall a \in \mathbb{R}\ a \neq 3$. $|A| \neq 0$. Por tanto $rg(A) = 3 = rg(A^*) = nº\ incógnitas$

$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$

Caso 2 $a = 3$. En este caso $|A| = 0\ y\ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 2 & 25 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$, $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 25 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3-2F_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 13 \\ 0 & 2 & 13 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \text{Por tanto } rg(A^*) = 2$$

$rg(A) = rg(A^*) = 2 < nº\ incógnitas$: Sistema Compatible Indeterminado.

b) Resolvemos para $a = 3$.

Observando el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -x + y - z = 7 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$$z = t; \quad \begin{cases} x + y = 6 - t \\ -x + y = 7 + t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \text{ de donde } y = \frac{13}{2} \text{ y } x = \frac{-1}{2} - t$$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = \frac{-1}{2} - t \\ y = \frac{13}{2} \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

2º) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcúlense los valores de k para los cuales la matriz A no es invertible.
b) Para $k = 0$, calcúlese la matriz inversa A^{-1}.
c) Para $k = 0$, resuélvase la ecuación matricial $AX = B$.

Resolución

a) $|A| = k^2 - 4k + 3$; $|A| = 0 \iff k^2 - 4k + 3 = 0 \iff \begin{cases} k = 1 \\ k = 3 \end{cases}$

b) $k = 0$; $|A| = 3$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

c) $k = 0$; $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

3º) Dada la función $f(x) = \frac{x^2-3}{e^x}$ se pide:

a) Determinar los máximos y mínimos relativos y asíntotas de la función justificando la existencia o no de cada una de ellas.
b) Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a $f(x)$ en el punto $x = -1$.

Solución

a) Mínimo relativo $P(-1, -2e)$. Máximo relativo $Q\left(3, \frac{6}{e^3}\right)$. *Asíntota horizontal* $y = 0$.

b) Recta tangente $y = -2e$ *y normal* $x = -1$ **.**

4º) Demuestra que la ecuación $\frac{x^2}{2} - ln(x-1)^2 = \frac{5}{2}$ tiene una única solución en el intervalo $(2, 1+e)$.

Resolución

Sea $f(x) = \frac{x^2}{2} - ln(x-1)^2 - \frac{5}{2}$, función continua en $\mathbb{R}$ por ser suma y resta de continuas.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \text{ continua en } [2, 1+e] \\ f(2) = -\dfrac{1}{2} < 0 \\ f(1+e) = \dfrac{(1+e)^2}{2} - 2 - \dfrac{5}{2} > 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_1 \in (2, 1+e) \text{ tal que } f(c_1) = 0 \iff \frac{{c_1}^2}{2} - ln(c_1 - 1)^2 - \frac{5}{2}$$

$$= 0 \iff \frac{{c_1}^2}{2} - ln(c_1 - 1)^2 = \frac{5}{2}$$

Así, c_1 es raíz de la ecuación $\frac{x^2}{2} - ln(x-1)^2 = \frac{5}{2}$

Veamos que la ecuación no tiene más soluciones en el intervalo $(2, 1+e)$:
Supongamos que c_2 fuese otra raíz de la ecuación y $c_1 < c_2$:
Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo (c_1, c_2) se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \text{ continua en } [c_1, c_2] \\ f(x) \text{ derivable en } (c_1, c_2) \\ f(c_1) = f(c_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_1 \in (c_1, c_2) \text{ tal que } f'(x_1) = 0$$

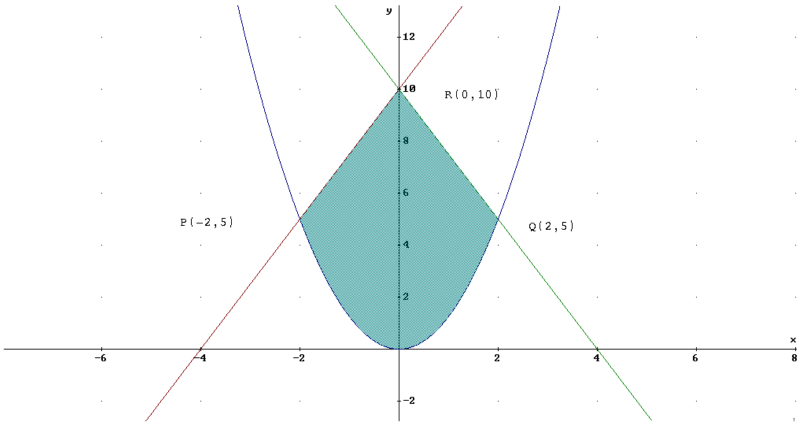
Sin embargo, la derivada $f'(x) = x - \frac{2}{x-1}$ y $x - \frac{2}{x-1} = 0 \iff x^2 - x - 2 = 0$ cuyas soluciones $x = -1$ *y* $x = 2$ no están en el intervalo $(2, 1+e)$, es decir no hay puntos de derivada nula, lo que contradice la existencia de $x_1 \in (c_1, c_2)$ tal que $f'(x_1) = 0$. La contradicción viene de suponer la existencia de una segunda raíz c_2 de la ecuación. En consecuencia, la ecuación $\frac{x^2}{2} - ln(x-1)^2 = \frac{5}{2}$ solo tiene una raíz c_1 en el intervalo $(2, 1+e)$.

5º) Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{5}{4}x^2$, $g(x) = \frac{1}{2}(5x+20)$, $h(x) = \frac{1}{2}(-5x+20)$ y obtener su área.

Resolución

Calculamos los puntos de corte de las funciones:

$$\begin{cases} y = \frac{5}{4}x^2 \\ y = \frac{1}{2}(5x+20) \end{cases} P(-2,5) \ ; \quad \begin{cases} y = \frac{5}{4}x^2 \\ y = \frac{1}{2}(-5x+20) \end{cases} Q(2,5) \ ; \quad \begin{cases} y = \frac{1}{2}(5x+20) \\ y = \frac{1}{2}(-5x+20) \end{cases} R(0,10)$$



Por simetría de la región, tenemos que su área viene dada por:

$$A = 2 \cdot \int_0^2 \left(\frac{1}{2}(-5x+20) - \left(\frac{5}{4}x^2\right)\right) dx = 2 \cdot \int_0^2 \left(-\frac{5}{4}x^2 - \frac{5x}{2} + 10\right) dx = 10 \cdot \int_0^2 \left(-\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 2\right) dx =$$

$$= 10 \cdot \left[-\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{4} + 2x\right]_0^2 = \frac{70}{3}\ u^2$$

6º] Una persona cuida de su jardín, pero es bastante descuidada y se olvida de regarlo dos de cada tres días. El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se riega es de 0,25.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el jardín progrese?

b) Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?

Resolución

Consideramos los sucesos siguientes:

$P =$ " *El jardín progresa*"

$R =$ "*El jardín ha sido regado*"

Del enunciado, $p(R) = \frac{1}{3}$; $p(\bar{R}) = \frac{2}{3}$ $p(P|R) = p(\bar{P}|R) = 0{,}5$; $p(P|\bar{R}) = 0{,}25$; $p(\bar{P}|\bar{R}) = 0{,}75$

a) $p(P) \overset{P.Total}{=} p(R) \cdot p(P|R) + p(\bar{R}) \cdot p(P|\bar{R}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

b) $p(\bar{R}|\bar{P}) \overset{T.Bayes}{=} \frac{p(\bar{R} \cap \bar{P})}{p(\bar{P})} = \frac{p(\bar{R}) \cdot p(\bar{P}|\bar{R})}{1 - p(P)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$

7º] El peso de las ovejas adultas se distribuye normalmente con una media de 53 Kg y una desviación típica de 2,4 Kg.

a) ¿Qué porcentaje de las ovejas pesará entre 50 y 57 Kg?

b) Si pretendemos separar una cuarta parte de las ovejas, siendo las más pesadas del rebaño, ¿a partir de qué peso se hará la separación?

c) Para un rebaño de 4000 ovejas, las 800 que menos pesan ¿por debajo de qué peso están?

Resolución

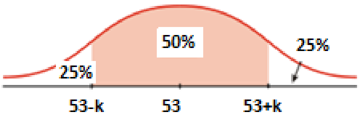
Sea $X = "Peso\ de\ las\ ovejas\ adultas"\ ;\ X \hookrightarrow N(53;\ 2{,}4)\ ;\ Z \hookrightarrow N(0,1)$

a) $p(50 \leq X \leq 57) = p\left(\frac{50-53}{2{,}4} \leq Z \leq \frac{57-53}{2{,}4}\right) = p(-1{,}25 \leq Z \leq 1{,}67) = p(Z \leq 1{,}67) -$ $p(Z > 1{,}25) =$

$= p(Z \leq 1{,}67) - [1 - p(Z \leq 1{,}25)] = 0{,}9525 - 1 + 0{,}8944 = 0{,}8469$

El porcentaje de ovejas entre 50 y 57 Kg será del 84,69%

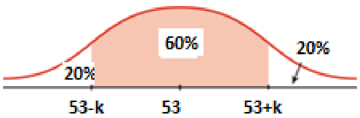
b) La cuarta parte de las ovejas es un 25%. Buscamos un valor $53 + k$ tal que $p(X > 53 + k) = 0{,}25$.



$p(X > 53 + k) = 0{,}25 \Leftrightarrow p(X < 53 + k) = 0{,}75 \Leftrightarrow p\left(Z < \frac{k}{2{,}4}\right) =$ $0{,}75 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{k}{2{,}4} = 0{,}675 \Leftrightarrow k = 1{,}62$

El valor que separa la cuarta parte de las ovejas más pesadas es $53 + 1{,}62 = 54{,}62\ Kg$

c) Sobre 4000 ovejas, 800 representan el 20%.



Buscamos un valor $53 - k$ tal que $p(X < 53 - k) = 0{,}20$.

$p(X < 53 - k) = 0{,}20 \Leftrightarrow p(X > 53 + k) = 0{,}20 \Leftrightarrow p(X \leq 53 + k) = 0{,}80 \Leftrightarrow p\left(Z \leq \frac{k}{2{,}4}\right) = 0{,}80 \Leftrightarrow \frac{k}{2{,}4} = 0{,}845 \Leftrightarrow k = 2{,}028$

Las 800 ovejas que menos pesan están por debajo de $53 - 2{,}028 = 50{,}972\ Kg$

Puntuación

1, 2, 3, 5, 6, 7 ----------- 1,5 puntos

4 -------------------------- 1 “