1º) Se considera el siguiente sistema lineal $\left\{\begin{array}{r} 3x+(a^2+1)y+z=1 \\ 2x+6y-2z=3a \\ x+y+z=-1 \end{array}\right.$

a) Discútase el sistema según los distintos valores del parámetro a.
b) Resuélvase cuando sea compatible indeterminado.

Resolución

a)

$$S'=\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & a^2+1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{S}\left|\begin{matrix} 1 \\ 3a \\ -1 \end{matrix}\right) \;;\; \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-4\neq 0;\ \text{rango } S\geq 2$$

$$|S|=\begin{vmatrix} 3 & a^2+1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=16-4a^2=4\left(4-a^2\right)=4\,(2+a)\,(2-a)$$

Por tanto, cuando $\boxed{a\neq -2 \wedge a\neq 2,\ \ |S|\neq 0\,,\ \text{rango } S=\text{rango } S'=3\,,\ \text{compatible determinado}}$

Caso $a=-2$

$$S'=\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{S}\left|\begin{matrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{matrix}\right) \;;\; \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-24\neq 0;\ \text{rango } S'=3\neq 2=\text{rango } S$$

Por tanto, cuando $\boxed{a=-2\ \text{ el sistema es incompatible}}$

Caso $a=2$

$$S'=\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{S}\left|\begin{matrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{matrix}\right) \;;\; \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0;\ \text{rango } S'=2=\text{rango } S$$

Por tanto, cuando $\boxed{a=2\ \text{ el sistema es compatible indeterminado}}$

b) $\boxed{x=-3-2\lambda \ \wedge\ y=2+\lambda \ \wedge\ z=\lambda}\quad (\lambda\in\mathbb{R})$

2º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

halla la matriz X que cumple $A=X\cdot B$

Resolución

$$B^{-1}=\frac{-1}{10}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X=A\cdot B^{-1}=\boxed{\frac{-1}{10}\begin{pmatrix} 0 & -10 & 0 \\ 25 & -20 & 0 \\ 18 & -18 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 2 & 0 \\ -\frac{9}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}}$$

3º) A una ventana rectangular se le abre un triángulo equilátero sobre el lado superior. Si el perímetro de la figura así formada es de 11 metros, determina las dimensiones para que el área de la figura sea máxima.

Resolución

$3x+2y=11\ ;\ y=\frac{11-3x}{2}$

$h=\sqrt{x^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$S=x\,y+\frac{1}{2}x\,h\ ;\ S\,(x)=x\frac{11-3x}{2}+\frac{1}{2}x\,\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{1}{4}\left(22x-6x^2+\sqrt{3}x^2\right)$

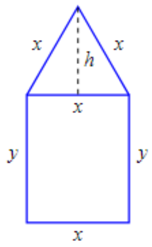
$S\,(x)=\frac{1}{4}\left(22x-\left(6-\sqrt{3}\right)x^2\right)$

$S'\,(x)=\frac{1}{4}\left(22-2\left(6-\sqrt{3}\right)x\right)$

$S'\,(x)=0\Rightarrow x=\frac{11}{6-\sqrt{3}}=\frac{66+11\sqrt{3}}{33}=\boxed{\frac{6+\sqrt{3}}{3}\text{ m}\approx 2{,}577\text{ m}}$

$y=\frac{11-3\frac{6+\sqrt{3}}{3}}{2}=\boxed{\frac{5-\sqrt{3}}{2}\text{ m}\approx 1{,}634\text{ m}}$

$S''\,(x)=\frac{\sqrt{3}-6}{2}<0\Rightarrow$ Los valores obtenidos corresponden a un máximo.



4º) Considera la función $f(x)=\ln(1+x^2)$
a) Determina sus extremos y puntos de inflexión.
b) Estudia si la recta de ecuación $y=-x-1+ln2$ es tangente a su gráfica en algún punto de inflexión.
c) Calcula su integral indefinida.

Resolución

a. $f\,(x)=\ln\left(1+x^2\right)$

$f'\,(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

$f''\,(x)=\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}$

$\left.\begin{array}{l} f'\,(x)=0\ ;\ \frac{2x}{1+x^2}=0\ ;\ x=0\ ;\ f\,(0)=\ln 1=0 \\ f''\,(0)=\frac{2-2\cdot 0^2}{(1+0^2)^2}=2>0 \end{array}\right\}\ \boxed{\text{Mínimo relativo en }\ (0{,}0)}$

$\left.\begin{array}{l} f''\,(x)=0\ ;\ \frac{2(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}=0\ ;\ x=\pm 1 \\ f\,(\pm 1)=\ln\left(1+1\right)=\ln 2 \end{array}\right\}\ \boxed{\text{Puntos de inflexión en }\ (-1,\ \ln 2)\ \text{ y }\ (1,\ \ln 2)}$

b. $r:\ y=-x-1+\ln 2\ ;\ \text{pendiente }\ m=-1$

$f'\,(x)=-1\ ;\ \frac{2x}{1+x^2}=-1\ ;\ x^2+2x+1=0\ ;\ (x+1)^2=0\ ;\ x=-1$

$y\,(-1)=-\left(-1\right)-1+\ln 2=\ln 2$

Efectivamente, $\boxed{\text{la recta }\ r\ \text{ es tangente a la curva en el punto de inflexión }\ (-1,\ \ln 2)}$

c) $\int L(1+x^2)dx\Longrightarrow \begin{array}{l} u=L(1+x^2)\ ;\ du=\frac{2x}{1+x^2}dx \\ dv=dx\ ;\ v=\int dv=\int dx=x \end{array}$

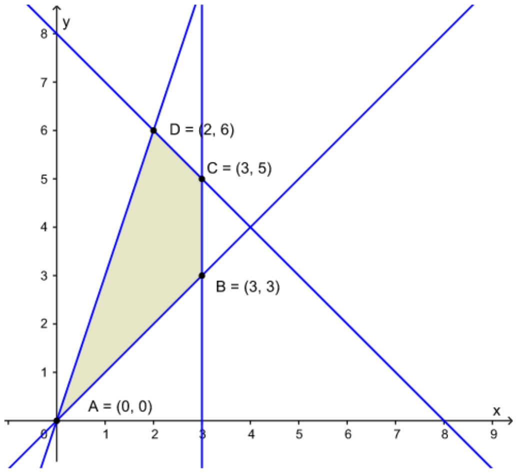
$$\int L(1+x^2)dx=x\cdot L(1+x^2)-2\cdot\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=x\cdot L(1+x^2)-2\cdot\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=$$

$$x\cdot L(1+x^2)-2\left(\int dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx\right)=x\cdot L(1+x^2)-2(x-arctgx)+c$$

5º) Dibuja y calcula el área de la región del plano limitada por las siguientes rectas

$$y=3x\ ;\ y=x\ ;\ y=-x+8\ ;\ x=3$$

Resolución



$y_1 = 3x\ ;\ y_2 = x\ ;\ y_3 = -x + 8$

De acuerdo con la figura:

$$S = \int_0^2 (y_1 - y_2)\ dx + \int_2^3 (y_3 - y_2)\ dx =$$

$$= \int_0^2 (3x - x)\ dx + \int_2^3 (-x + 8 - x)\ dx = \int_0^2 2x\,dx + \int_2^3 (-2x + 8)\ dx =$$

$$= \left[x^2\right]_0^2 + \left[-x^2 + 8x\right]_2^3 = 4 + (15 - 12) = \boxed{7\ \mathrm{u}^2}$$

6º) En un colectivo de inversores bursátiles, el 20% **realiza operaciones vía internet. De los inversores que realizan operaciones vía internet, un** 80% **consulta InfoBolsaWeb. De los inversores bursátiles que no realizan inversiones vía internet solo un** 20% **consulta InfoBolsaWeb. Se pide:**

a) Obtener la probabilidad de que un inversor elegido al azar en este colectivo consulte InfoBolsaWeb.
b) Si se elige al azar un inversor bursátil de este colectivo y resulta que consulta InfoBolsaWeb, ¿cuál es la probabilidad de que realice operaciones por internet?
c) La probabilidad de que un inversor elegido al azar no realice operaciones vía internet y consulte infobolsa.

Resolución

Consideramos los sucesos siguientes:

$I = "El\ inversor\ realiza\ operaciones\ vía\ internet"$

$W = "El\ inversor\ consulta\ InfobolsaWeb"$

$C = "La\ resistencia\ ha\ sido\ producida\ por\ el\ operario\ C"$

$D = "La\ resistencia\ es\ defectuosa"$

Del enunciado tenemos que

$$p(I) = 0{,}2\ ;\quad ;\ p(W|I) = 0{,}8\ ;\ p(W|\bar{I}) = 0{,}2$$

por tanto, $p(\bar{I}) = 1 - p(I) = 0{,}8\ ;\ p(\overline{W}|I) = 1 - p(W|I) = 0{,}2\ ;\ p(\overline{W}|\bar{I}) = 1 - p(W|\bar{I}) = 0{,}8$

a) $p(W) \overset{P.Total}{\triangleq} p(I) \cdot p(W|I) + p(\bar{I}) \cdot p(W|\bar{I}) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}32$

$b)\ p(I|W) \overset{T.Bayes}{\triangleq} \dfrac{p(I) \cdot p(W|I)}{p(W)} = \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{0{,}32} = \dfrac{0{,}16}{0{,}32} = 0{,}5$

$c)\ p(\bar{I} \cap W) = p(\bar{I}) \cdot p(W|\bar{I}) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$

7º) El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta se distribuye según una normal de media 1500 horas y desviación típica 200 horas. Calcula razonadamente:
a) ¿Qué porcentaje de esas impresoras fallarán antes de las 1000 horas de funcionamiento?
b) ¿En qué intervalo, centrado en la media, se encuentra el 95% de las impresoras?
c) Si el 10,75% son catalogadas como impresoras de larga duración, ¿cuántas horas duran como mínimo?

Resolución

Definimos la variable $X =$ "Duración, en horas, de una impresora"; $X \rightarrow N(1500, 200)$

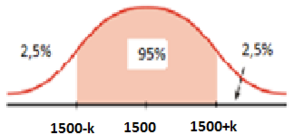
a) $p(X < 1000) = p\left(Z < \frac{1000-1500}{200}\right) = p(Z < -2{,}5) = p(Z > 2{,}5) = 1 - p(Z \le 2{,}5) =$

$= 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$

Se espera que el 0,62% de las impresoras fallen antes de las 1000 horas de funcionamiento

b) Se trata de hallar el intervalo tal que $p(1500 - k \leq X \leq 1500 + k) = 0{,}95$, o lo que es lo mismo

$$p(X \leq 1500 + k) = 0{,}975$$



$$p(X \leq 1500 + k) = 0{,}975 \Leftrightarrow p\left(Z \leq \frac{k}{200}\right) = 0{,}975 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{200} = 1{,}96 \Leftrightarrow k = 392$$

El intervalo buscado es $(1500 - 392;\ 1500 + 392) = (1108;\ 1892)$

c) Razonando como en el apartado anterior, se trata de hallar el valor $1500 + k$ tal que el 89,25% de las llamadas tengan duración inferior a ese valor, esto es,

$$p(X \leq 1500 + k) = 0{,}8925$$

$$p(X \leq 1500 + k) = 0{,}8925 \Leftrightarrow p\left(Z \leq \frac{k}{200}\right) = 0{,}8925 \Leftrightarrow \frac{k}{200} = 1{,}24 \Leftrightarrow k = 248$$

A partir de $1500 + 248 = 1748$ horas se encuentra el 10,75% de las impresoras catalogadas como de larga duración.

Puntuación

1, 2, 3, 4, 6, 7 ----------- 1,5 puntos
5 -------------------------   1   “