1º) Demuestra que la ecuación $x \cdot e^x = 2$ tiene exactamente una raíz real positiva.

Resolución

Sea $f(x) = x \cdot e^x - 2$ continua en $\mathbb{R}$ por ser resta y producto de continuas.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ \ continua\ en\ [0,1] \\ f(0) = -2 < 0 \\ f(1) = e - 2 > 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \quad \exists c_1 \in (0,1)\ con\ f(c_1) = 0 \Leftrightarrow c_1 \cdot c^{c_1} - 2 = 0 \Leftrightarrow c_1 \cdot c^{c_1} = 2$$

Por tanto, la ecuación $x \cdot e^x = 2$ tiene, al menos, una raíz $c_1 \in (0,1)$ y, por tanto, positiva. Supongamos que c_2 fuese otra raíz positiva de la ecuación, esto es $f(c_2) = 0$ y $c_2 > c_1$. Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo (c_1, c_2) se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ \ [c_1, c_2] \\ f(x)\ derivable\ en\ (c_1, c_2) \\ f(c_1) = f(c_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_1 \in (c_1, c_2)\ tal\ que\ f'(x_1) = 0$$

es decir, encontramos un punto x_1 positivo de derivada nula.

Sin embargo, $f'(x) = e^x \cdot (x+1)$ y $e^x \cdot (x+1) = 0 \Longrightarrow x = -1$; esto contradice la existencia de un valor positivo $x_1 \in (c_1, c_2)$ con $f'(x_1) = 0$. La contradicción viene de suponer la existencia de una segunda raíz c_2. Por tanto, la ecuación tiene exactamente una raíz real positiva c_1.

2º) Se divide un hilo de 100 metros en dos trozos, de longitudes x e y. Con el trozo de longitud x se construye un cuadrado y con el de longitud y se forma un rectángulo, cuyo lado mayor es el doble del menor. Averigua x e y para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

Resolución

Sean x e y las longitudes de la partición del hilo.

Planteamiento del problema: $\left[\begin{array}{ll} minimizar\ \ S(x,y) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{y^2}{18} & función\ objetivo \\ s.a\ \ \ x + y = 100 & restricción \end{array}\right.$

Despejando de la restricción tenemos: $y = 100 - x$ y, sustituyendo en la función objetivo:

$S(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(100-x)^2}{18}$, que es la función suma de áreas dependiente de una sola variable.

Buscamos el mínimo de la función $S(x)$:

$S'(x) = \frac{x}{8} - \frac{100-x}{9}$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{8} - \frac{100-x}{9} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{8} = \frac{100-x}{9} \Leftrightarrow 17x = 800 \Leftrightarrow x = \frac{800}{17} m$

$y = 100 - \frac{800}{17} = \frac{900}{17} m$

Comprobamos que, efectivamente, el valor $x = \frac{800}{17}$ es mínimo de la función suma S(x):

$S''(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$; $S''\left(\frac{800}{17}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} > 0$ Mínimo en $x = \frac{800}{17}$.

Los valores que minimizan la suma de áreas son:

$$x = \frac{800}{17} \cong 47{,}059\ m \quad e \quad y = \frac{900}{17} \cong 52{,}941\ m$$

3º) Calcula $\lim_{x \to 0^+} (tgx)^{senx}$

Resolución

a) $\lim_{x \to 0^+} (tgx)^{senx} \overset{0^0}{=}$

Tomamos logaritmo neperiano:

$$ln\left(\lim_{x\to0^+}(tgx)^{senx}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(ln(tgx)^{senx}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(senx\cdot ln(tgx)\right)\overset{0\cdot(-\infty)}{\equiv}\lim_{x\to0^+}\frac{ln(tgx)}{\frac{1}{senx}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}\,L'H\hat{o}p}{\equiv}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{tgx\cdot cos^2x}}{\frac{-cosx}{sen^2x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-senx}{cos^2x}=\frac{0}{1}=0.$$

Así, $ln\left(\lim_{x\to0^+}(tgx)^{senx}\right)=0$ y, por tanto $\lim_{x\to0^+}(tgx)^{senx}\overset{0^0}{\equiv}e^0=1$

4º) Dada la función $f(x)=\frac{10x}{x^2+2}$ se pide:

a) Su dominio, simetría, monotonía, extremos y asíntotas.

b) Esboza su gráfica.

c) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x=1$.

Resolución

a) $Dom\ (f)=\mathbb{R}$ porque se trata de una función racional en la que el denominador no tiene raíces reales.

$$f(-x)=\frac{-10x}{x^2+2}=-\frac{10x}{x^2+2}=-f(x)\quad función\ con\ simetría\ impar$$

$$f'(x)=\frac{10(x^2+2)-10x\cdot2x}{(x^2+2)^2}=\frac{20-10x^2}{(x^2+2)^2}\begin{cases}<0\\>0\end{cases}$$

Ceros: $20-10x^2=0\Longrightarrow\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\x=\sqrt{2}\end{cases}$ Polos: $(x^2+2)^2=0$ *No tiene*

La recta real queda dividida en tres intervalos, $(-\infty,-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2}),\ (\sqrt{2},+\infty)$

	$(-\infty,-\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},+\infty)$
Signo de $f'(x)=\frac{20-10x^2}{(x^2+2)^2}$	$-$	$+$	$-$

Decrece: $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$; Crece: $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

Extremos relativos: Mínimo en $P\left(-\sqrt{2},\frac{-5\sqrt{2}}{2}\right)$ y Máximo en $Q\left(\sqrt{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

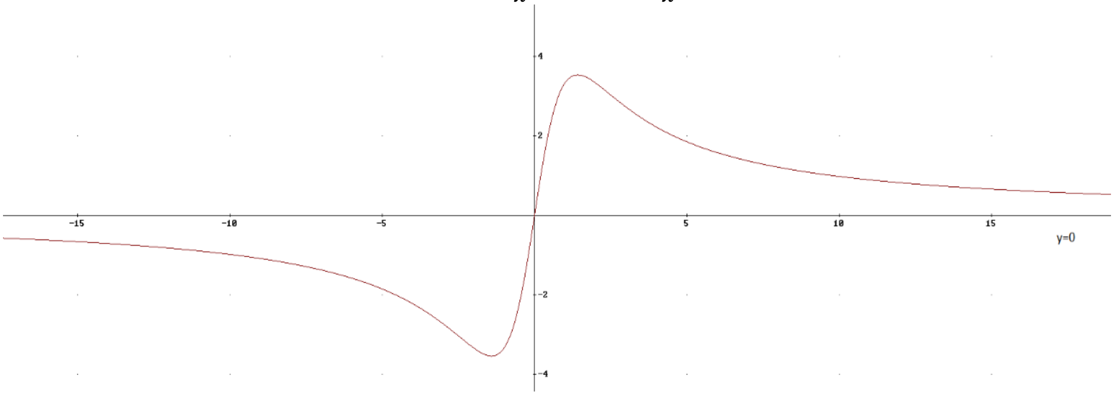
Asíntotas:

Verticales: No tiene porque $\lim_{x\to a}\frac{10x}{x^2+2}=\frac{10a}{a^2+2}\neq\pm\infty$;

Horizontales: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{10x}{x^2+2}=0$ La recta $y=0$ es asíntota horizontal

Oblicua $y=mx+n$: No tiene porque $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{x^3+2x}=0$

b)



c) $f(1)=\frac{10}{3}$; $f'(1)=\frac{10}{9}$

La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P\left(1,\frac{10}{3}\right)$ es:

$$t \equiv y - \frac{10}{3} = \frac{10}{9}\cdot(x-1) \Leftrightarrow t \equiv y = \frac{10}{9}x + \frac{20}{9}$$

5º) Calcula la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{1}{e^x\sqrt{1+e^{-x}}}$ que pasa por el punto $P(0,1)$.

Resolución

La primitiva que buscamos estará en su integral indefinida:

$$F(x) = \int \frac{1}{e^x\sqrt{1+e^{-x}}}\,dx = -\int \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1+e^{-x}}}\,dx = -2\sqrt{1+e^{-x}} + c$$

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} + c = 1 \Leftrightarrow c = 1 + \sqrt{2}$$

La primitiva es $F(x) = -2\sqrt{1+e^{-x}} + 1 + \sqrt{2}$

6º) Calcula las siguientes integrales:

$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cdot senx\,dx$

b) $\int \frac{x^3+4x^2+5x+1}{x^2+4x+4}\,dx$

Resolución

a)

$$\int (x-1)\cdot senx\,dx \qquad \begin{matrix} u = x-1 \\ dv = senx\,dx \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} du = dx \\ v = \int dv = \int senx\,dx = -cosx \end{matrix}$$

Así, aplicando la fórmula de integración por partes, obtenemos la integral

$$\int (x-1)\cdot senx\,dx = (1-x)\cdot cosx + \int cosx\,dx = (1-x)\cdot cosx + senx + c$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cdot senx\,dx = [(1-x)\cdot cosx + senx]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 1 = 0$$

b) $I = \int \frac{x^3+4x^2+5x+1}{x^2+4x+4}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{x+1}{(x+2)^2}\,dx = x + c_1 + I_1$ una vez efectuada la división del radicando al tratarse de una integral racional con integrando con grado del numerador mayor que el del denominador.

$I_1 = \int \frac{x+1}{(x+2)^2}\,dx$, se trata de una integral racional

Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{x+1}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2}$$

$$x + 1 = A(x+2) + B$$

Sustituyendo $x = -2$ y $x = 0$ obtenemos $\begin{cases} -1 = B \\ 1 = 2A + B \end{cases}$ de donde $A = 1$ y $B = -1$

Así,

$$I_1 = \int \frac{x+1}{(x+2)^2}\,dx = \int \frac{1}{x+2}\,dx - \int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = L|x+2| + \frac{1}{x+2} + c_2$$

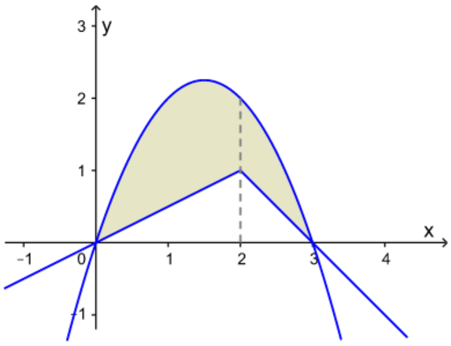
$$I = \int \frac{x^3+4x^2+5x-1}{x^2+4x+4}\,dx = \frac{x^2}{2} + L|x+2| + \frac{1}{x+2} + c$$

7º) Dibuja la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = -x^2 + 3x \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & si\ x \leq 2 \\ 3 - x & si\ x > 2 \end{cases}$$

y calcula su área.

Resolución



$x \leq 2\ :\ \frac{x}{2} = -x^2 + 3x\ ;\ 2x^2 - 5x = 0\ ;\ 2x\left(x - \frac{5}{2}\right) = 0\ ;\ x = 0$

$f(0) = g(0) = 0\ ;\ P(0{,}0)$

[La otra solución queda fuera de rango]

$x > 2\ :\ 3 - x = -x^2 + 3x\ ;\ x^2 - 4x + 3 = 0\ ;\ (x-1)(x-3) = 0\ ;\ x = 3$

$f(3) = g(3) = 0\ ;\ Q(3{,}0)$

[La otra solución queda fuera de rango]

Los puntos buscados son $\boxed{\begin{cases} P(0{,}0) \\ Q(3{,}0) \end{cases}}$

$$S_1 = \left|\int_0^2 (f(x) - g(x))\ dx\right| = \left|\int_0^2 \left(-x^2 + 3x - \frac{x}{2}\right)\ dx\right| = \left|\int_0^2 \left(-x^2 + \frac{5x}{2}\right)\ dx\right| = \left|\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{4}\right]_0^2\right| = \frac{7}{3}$$

$$S_2 = \left|\int_2^3 (f(x) - g(x))\ dx\right| = \left|\int_2^3 (-x^2 + 4x - 3)\ dx\right| = \left|\left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_2^3\right| = \frac{2}{3}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{7}{3} + \frac{2}{3} = \frac{9}{3} = \boxed{3\ \text{u}^2}$$

Puntuación

1, 2, 6, 7 -------------- 1,5 puntos	4 ---------- 2,25 puntos
3 ---------------------- 0,75 “	5 ---------- 1 “