1º) En un experimento aleatorio A y B son dos sucesos tales que $p(\bar{A}) = \frac{4}{9}$, $p(B) = \frac{1}{2}$ y $p(A \cup B) = \frac{2}{3}$

a) Comprueba si los sucesos A y B son independientes o no.

b) Calcula $p(\bar{A}|B)$ siendo $\bar{A}$ el suceso contrario de A.

Resolución

a. $p(A) = \frac{5}{9}$, $p(B) = \frac{1}{2}$, $p(A \cup B) = \frac{2}{3}$

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \frac{5}{9} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{10+9-12}{18} = \frac{7}{18}$$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{7/18}{1/2} = \frac{7}{9} \neq \frac{5}{9} = p(A) \Rightarrow \boxed{\text{los sucesos } A \text{ y } B \text{ no son independientes}}$$

b. $p\left(\overline{A}/B\right) = 1 - p(A/B) = 1 - \frac{7}{9} = \boxed{\frac{2}{9}}$

2º) Dos características genéticas A y B aparecen en una especie animal con probabilidades respectivas de $0{,}2$ y $0{,}3$. Sabiendo que la aparición de una de ellas es independiente de la aparición de la otra, se pide calcular:

a) La probabilidad de que un individuo, elegido al azar, presente ambas características.

b) La probabilidad de que no presente ninguna de ellas.

c) La probabilidad de que presente solamente una de ellas.

d) La probabilidad de que, si elegimos al azar 10 individuos, exactamente 3 de ellos presenten la característica A.

Resolución

a) $P(A \cap B) = 0.2 \cdot 0.3 = \boxed{0.06}$.

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.8 \cdot 0.7 = \boxed{0.56}$.

c) $P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0.2 \cdot 0.7 + 0.8 \cdot 0.3 = \boxed{0.38}$.

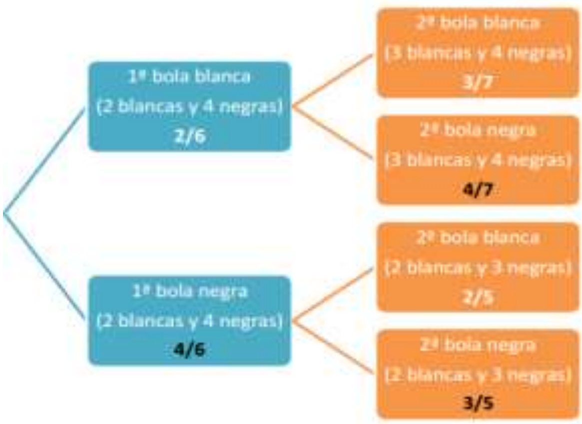
d) $P(n = 3) = \binom{10}{3} 0.2^3 (1 - 0.2)^7 = \boxed{0.201326592}$.

3º) En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

Resolución



Llamamos B1 y B2 a sacar bola blanca en 1ª y 2ª extracción, Análogamente N1 y N2 a sacar negra en 1ª y 2ª extracción.

a) Para sacar dos bolas de distinto color deben ser una blanca y la otra negra, pudiendo ser la 1ª blanca y 2ª negra o 1ª negra y 2ª blanca.

$$P(\text{Dos bolas de distinto color}) = P(B1 \cap N2) + P(N1 \cap B2) =$$
$$= P(B1)P(N2/B1) + P(N1)P(B2/N1) = \{\text{Miramos el diagrama de árbol}\} =$$
$$= \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{7} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} = \boxed{\frac{16}{35} \simeq 0.457}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(N1/B2) = \frac{P(N1 \cap B2)}{P(B2)} = \frac{P(N1)P(B2/N1)}{P(B1)P(B2/B1) + P(N1)P(B2/N1)} =$$
$$= \frac{\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{7} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}} = \boxed{\frac{28}{43} \simeq 0.65}$$

4º) En una empresa frutícola, la producción por árbol sigue una distribución normal de media $54{,}3\ kg$ y desviación típica de $6{,}5\ kg$.
a) ¿Cuál es el porcentaje de árboles que producen más de $57\ kg$?
b) ¿Qué porcentaje de árboles producen entre 50 y $57\ kg$?
c) Si se escoge al azar un árbol que está dentro del 70% de los árboles que menos producen, ¿cuántos kilogramos debería producir como mucho?

Resolución

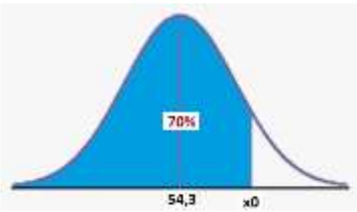
a. x : producción (kg) del árbol

$$x \sim N(\mu, \sigma) \ : \ \begin{cases} \mu = 54{,}3 \text{ kg} \\ \sigma = 6{,}5 \text{ kg} \end{cases}$$

$$p(x > 57) = p\left(z > \tfrac{57-54{,}3}{6{,}5}\right) = p(z > 0{,}415) = 1 - p(z \leq 0{,}415) \underset{\text{tabla}}{=}$$
$$= 1 - 0{,}661 = 0{,}339 = \boxed{33{,}9\%}$$

b. $$p(50 < x < 57) = p(x < 57) - p(x < 50) = 1 - p(x > 57) - p\left(z < \tfrac{50-54{,}3}{6{,}5}\right) =$$
$$= 0{,}661 - p(z < -0{,}6615) = 0{,}661 - (1 - p(z \leq 0{,}6615)) = p(z \leq 0{,}6615) - 0{,}339 \underset{\text{tabla}}{=}$$
$$= 0{,}746 - 0{,}339 = 0{,}407 = \boxed{40{,}7\%}$$

c. $$p(z \leq z_0) = 0{,}7 \xrightarrow[\text{tabla}]{} z_0 = 0{,}5244 = \tfrac{x_0 - 54{,}3}{6{,}5} \ ; \ x_0 = 54{,}3 + 0{,}5244 \cdot 6{,}5 \approx \boxed{57{,}71 \text{ kg}}$$



5º) En un garaje hay 30 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrase o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es de $0{,}4$, se pide:
a) Identifica y describe este modelo de probabilidad.
b) Halla la probabilidad de que cierto día haya 8 automóviles aparcados. (sin cálculos)

c) Halla la probabilidad de que un día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados.

Resolución

a. $x:$ nº de coches aparcados

$p = 0{,}4$ probabilidad de plaza ocupada ; $q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$n = 30$ aparcamientos (plazas)

La variable x se distribuye de $\boxed{\text{forma binomial}}$; $x \sim B(n, p) : \begin{cases} n = 30 \\ p = 0{,}4 \end{cases}$

b. $p(x = 8) = \binom{30}{8} p^8 q^{22} = \frac{30 \cdot 29 \cdot \ldots \cdot 23}{8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} 0{,}4^8 \cdot 0{,}6^{22} \approx \boxed{0{,}05049}$

c. Aproximación a la Normal: $x' \sim N(\mu, \sigma) : \begin{cases} \mu = n \cdot p = 30 \cdot 0{,}4 = 12 \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{30 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} \approx 2{,}6833 \end{cases}$

$p(10 \leq x \leq 20) = p(9{,}5 \leq x' \leq 20{,}5) = p\left(\frac{9{,}5 - 12}{2{,}6833} \leq z \leq \frac{20{,}5 - 12}{2{,}6833}\right) =$

$= p(-0{,}932 \leq z \leq 3{,}168) = p(z \leq 3{,}168) - p(z \leq -0{,}932) =$

$= p(z \leq 3{,}168) - (1 - p(z < 0{,}932)) \underset{\text{tabla}}{=} 0{,}9992 - (1 - 0{,}8243) = \boxed{0{,}8235}$

Puntuación

1 ------------------ 1’5 puntos
2, 3 --------------- 2 “
4, 5 --------------- 2,25 “