1º) Dada la función $f(x)=\begin{cases}3x+2 & si\ x<2\\ x^2-x+6 & si\ x\geq 2\end{cases}$ **demuestra que cumple las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo** $[0,4]$**, halla el valor** c **que satisface el teorema e interpreta geométricamente el resultado obtenido.**

Resolución

Continuidad

$\forall x\in\mathbb{R}, x<2,\ f(x)=3x+2$, que es continua por ser polinómica.

$\forall x\in\mathbb{R}, x>2,\ f(x)=x^2-x+6$, que es continua por ser polinómica.

Veamos que es continua en $x=2$:

1º) $f(2)=8$

2º) $\lim_{x\to 2} f(x)\begin{cases}\lim_{x\to 2^-}(3x+2)=8\\ \lim_{x\to 2^+}(x^2-x+6)=8\end{cases}$ $\lim_{x\to 2} f(x)=2$

3º) $f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y, en particular, en el intervalo $[0,4]$.

Derivabilidad

$f'(x)=\begin{cases}3 & si\ x<2\\ 2x-1 & si\ x>2\end{cases}$ f es derivable antes y después de $x=2$

En $x=2$ se tiene que $f'(2)^-=3=f'(2)^+$ y $f(x)$ es derivable.

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ y, en particular, en el intervalo $[0,4]$.

Se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0,4]$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\ continua\ en\ [0,4]\\ f(x)\ derivable\ en\ (0,4)\end{array}\right\}\overset{T.Valor\ medio}{\Longrightarrow}\ \exists c\in(0,4)\ tal\ que\ f'(c)=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=4$$

$$f'(c)=4\Leftrightarrow 2c-1=4\Leftrightarrow c=\frac{5}{2}$$

En el punto de abscisa $x=\frac{5}{2}$, la recta tangente a la curva $y=f(x)$, es paralela a la cuerda que une los puntos $P(0,2)$ y $Q(4,18)$.

2º) Dada la función $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ **se pide:**

a) Los puntos de la gráfica de la función en los que la pendiente de la recta tangente sea 1**.**

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $\mathrm{f(x)}$ **en el punto de abscisa** $\mathrm{x}=0$**.**

Resolución

a) Los puntos de la gráfica de la función en los que la pendiente de la recta tangente es 1 son aquellos en los que $f'(x)=1$.

$$f'(x)=\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\ ;\ f'(x)=1\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}=1\Leftrightarrow x^2+1=(1-x^2)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+1=1-2x^2+x^4\Leftrightarrow x^4-3x^2=0\Leftrightarrow x^2\cdot(x^2-3)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ x=-\sqrt{3}\\ x=\sqrt{3}\end{cases}$$

Los puntos son: $A(0,0), B\left(-\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ y\ C\left(\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $f(0)=0\ ;\ f'(0)=1$

La recta tangente es $t\equiv y-0=1\cdot(x-0);\ \ t\equiv y=x$

3º) Demuestra que la ecuación $2x^5+x-2=0$ tiene exactamente una raíz real y calcúlala con una cifra decimal exacta.

Resolución

Sea $f(x)=2x^5+x-2$, función continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [0,1] \\ f(0)=-2<0 \\ f(1)=1>0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_1\in(0,1)\ tal\ que\ f(c_1)=0 \Leftrightarrow 2{c_1}^5+c_1-2=0$$

Así, c_1 es raíz de la ecuación $2x^5+x-2=0$. Veamos que no tiene más.

Supongamos que c_2 fuese otra raíz de la ecuación; así $5{c_2}^5+c_2-2=0\ \ y\ \ f(c_2)=0$

Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo (c_1,c_2) se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ \ [c_1,c_2] \\ f(x)\ derivable\ en\ (c_1,c_2) \\ 0=f(c_1)=f(c_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_1\in(c_1,c_2)\ tal\ que\ f'(x_1)=0$$

es decir, encontramos un punto x_1 de derivada nula.

Sin embargo, $f'(x)=10x^4+1$ y $10x^4+1\ \ =0$ no tiene solución real; esto contradice la existencia de un valor x_1 con derivada nula. La contradicción viene de suponer la existencia de una segunda raíz c_2. Por tanto, la ecuación tiene exactamente una raíz c_1 en el intervalo $(0,1)$.

La calculamos con una cifra decimal exacta. Para ello, dividimos en intervalo $(0,1)$ en diez partes iguales y evaluamos la función $f(x)=2x^5+x-2$ en los extremos de cada subintervalo.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [0'8,0'9] \\ f(0{,}8)<0 \\ f(0{,}9)>0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_1\in(0'8,0'9)\ tal\ que\ f(c_1)=0 \Leftrightarrow 2{c_1}^5+c_1-2=0$$

Así, la única raíz es $c_1=0{,}8\ldots$

4º) Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}\right)^x$

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{L(1+x)-senx}{x\cdot senx}$

Resolución

a) $\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}\right)^x \overset{0^0}{\cong}$

$$L\left(\lim_{x\to0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}\right)^x\right)=\lim_{x\to0^-}L\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}\right)^x=\lim_{x\to0^-}\left(x\cdot L\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}\right)\right)\overset{0.\infty}{\cong}\lim_{x\to0^-}\frac{L\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{+\infty}{-\infty},L`Hôp}{\cong}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}}\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}+e^{\frac{2}{x}}\cdot\frac{-2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}\left(1+2e^{\frac{1}{x}}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^-}\frac{1+2e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$$

Así, $L\left(\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}\right)^x\right)=1$ y. por tanto, $\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}\right)^x=e^1=e$

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{L(1+x)-senx}{x\cdot senx}\overset{\frac{0}{0},L`Hôp}{\cong}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-cosx}{senx+x\cdot cosx}\overset{\frac{0}{0},L`Hôp}{\cong}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{-1}{(1+x)^2}+senx}{cosx+cosx-x\cdot senx}=-\frac{1}{2}$

5º) Queremos dividir un hilo metálico de 70 metros de longitud en tres partes de manera que una de ellas tenga doble longitud que otra y además que al construir sobre cada parte un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Calcula la longitud de cada parte.

Resolución

Sean x, y, z las longitudes de los trozos.
Es claro que $x + y + z = 70$. Como uno de los trozos tiene doble longitud que otro, vamos a expresar $z = 2x$, así se tiene que $3x + y = 70$ que es la restricción del problema.
El área de cada cuadrado construido con cada trozo es $x^2, y^2, 4x^2$ y la suma de las áreas de dichos cuadrados $5x^2 + y^2$

El planteamiento del problema es: : $\begin{bmatrix} minimizar & A(x,y) = 5x^2 + y^2 & función\ objetivo \\ s.a & 3x + y = 70 & restricción \end{bmatrix}$

Despejando y de la restricción, $y = 70 - 3x$. Sustituyendo en la función objetivo:

$$A(x) = 5x^2 + (70 - 3x)^2 = 14x^2 - 420x + 4900 \quad minimizar$$

Derivando, $A'(x) = 28x - 420$; $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 28x - 420 = 0 \Leftrightarrow x = 15$

$A''(x) = 28$ y A''(15)>0. Por tanto, hemos encontrado un mínimo de la función A.
Las dimensiones de los trozos de alambre que minimizan la suma de las áreas de los cuadrados construidos con ellas son: $x = 15\ m$; $y = 70 - 45 = 25\ m$; $z = 2 \cdot 15 = 30\ m$

6º) Estudia el dominio, corte con los ejes, monotonía, curvatura y asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$. Esboza su gráfica.

Resolución

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ porque $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$
Cortes con los ejes coordenados

$y = f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$; $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$; $P(0,0)$

Monotonía: $f'(x) = \frac{2x\cdot(2-x)+x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x-x^2}{(2-x)^2} \begin{cases} < 0\ (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)\ f\ Decrece \\ > 0\ (0,2) \cup (2,4)\ f\ crece \end{cases}$

Curvatura: $f''(x) = \frac{(4-2x)\cdot(2-x)^2+(4x-x^2)\cdot 2\cdot(2-x)}{(2-x)^4} = \frac{8}{(2-x)^3}$

$$f''(x) = \frac{8}{(2-x)^3} \begin{cases} < 0 \Leftrightarrow 2 - x < 0 \Leftrightarrow x > 2.\ (2, +\infty)\ f\ Convexa \\ > 0 \Leftrightarrow 2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2.\ (-\infty, 2)\ f\ Cóncava \end{cases}$$

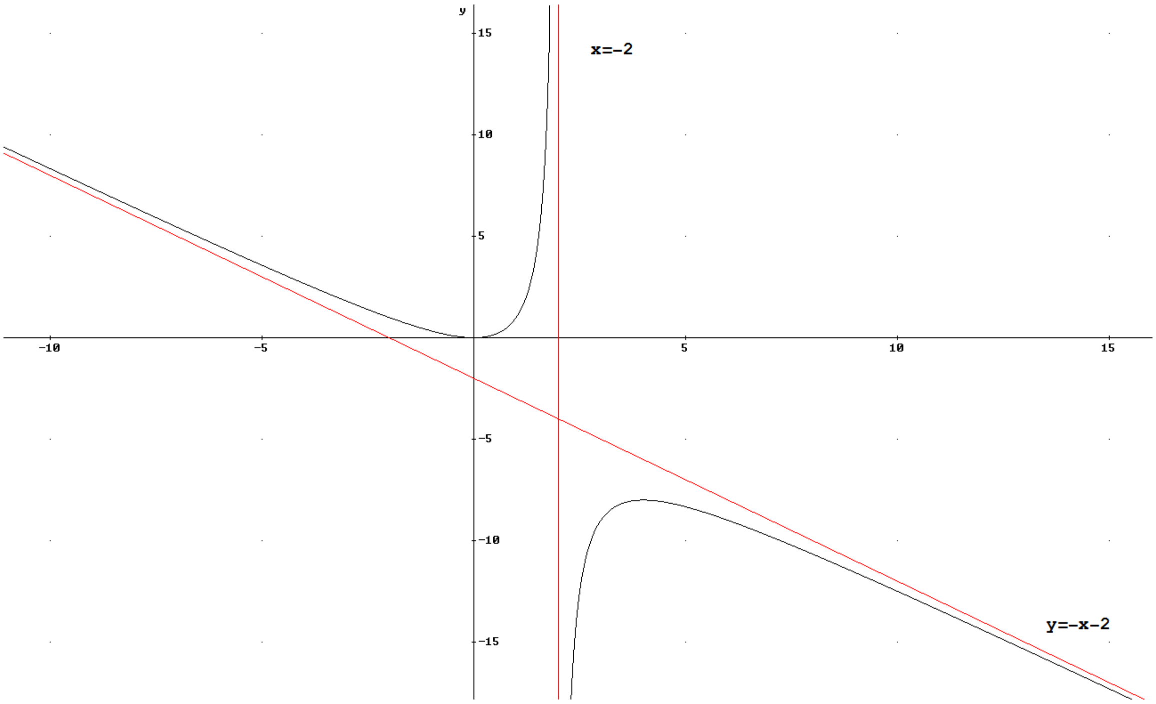
Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{2-x} \overset{\frac{4}{0}}{\cong} \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{2-x} \overset{\frac{4}{0^+}}{\cong} + \infty \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{2-x} \overset{\frac{4}{0^-}}{\cong} - \infty \end{cases}$$ la recta $x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal no tiene porque $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2-x} = \mp\infty$

Asíntota oblicua: $y = mx + n$

$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{2-x}}{x} = -1$; $n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{2-x} + x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{2-x} = -2$
$y = -x - 2$ es asíntota oblicua



Puntuación

1, 2, 3, 4 ------ 1,5 puntos
5, 6 ------------ 2 "