1º) Calcula una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=\frac{3x^2-2}{x+2}$ tal que $F(-1)=\frac{3}{2}$

Resolución

La primitiva que buscamos estará en su integral indefinida, que es racional:

$$F(x)=\int\frac{3x^2-2}{x+2}\,dx \overset{\substack{Efectuando \\ la\ división}}{\cong} \int(3x-6)\,dx+\int\frac{10}{x+2}=\frac{3x^2}{2}-6x+10L|x+2|+c$$

$$F(-1)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{3}{2}+6+c=\frac{3}{2}\Leftrightarrow c=-6$$

La primitiva es $F(x)=\frac{3x^2}{2}-6x+10L|x+2|-6$

2º) Calcula las siguientes integrales:

Resolución

a) $\int\frac{\sqrt{x-3}}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int(x-3)^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{2}\frac{(x-3)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=\frac{\sqrt{(x-3)^3}+c}{3}$

b) $\int\frac{2senx}{3+cosx}\,dx=-2\int\frac{-senx}{3+cosx}\,dx=-2L|3+cosx|+c$

c) $\int\frac{3x^2+4}{(x-2)^2\cdot(x+2)}\,dx$

Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{3x^2+4}{(x-2)^2\cdot(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+2}=\frac{A(x-2)(x+2)+B(x+2)+C(x-2)^2}{(x-2)^2\cdot(x+2)}$$

$$3x^2+4=A(x-2)(x+2)+B(x+2)+C(x-2)^2$$

Sustituyendo $x=2$; $x=-2$ y $x=0$ obtenemos $\begin{cases} 16=4B \\ 16=16C \\ 4=-4A+2B+4C \end{cases}$ de donde

$$A=2\ ;\ B=4\ ;\ C=1$$

Por tanto:

$$\int\frac{3x^2+4}{(x-2)^2\cdot(x+2)}\,dx=2\int\frac{1}{x-2}\,dx+4\int(x-2)^{-2}\,dx+\int\frac{1}{x+2}\,dx=2L|x-2|-\frac{4}{x-2}+L|x+2|+c$$

d) $\int\frac{e^{\frac{1}{x}+1}}{5x^2}\,dx=\frac{-1}{5}\int e^{\frac{1}{x}+1}\cdot\frac{-1}{x^2}\,dx=\frac{-e^{\frac{1}{x}+1}}{5}+c$

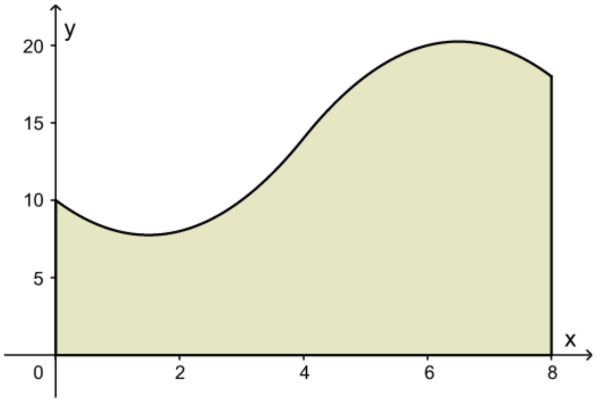
e) $\int\frac{L(1+x^2)}{x^2}dx=\frac{-L(1+x^2)}{x}+\int\frac{2}{1+x^2}dx=\frac{-L(1+x^2)}{x}+2arctgx+c$

$$\left.\begin{array}{l} u=L(1+x^2) \\ dv=\frac{1}{x^2}\,dx \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} du=\frac{2x}{1+x^2}dx \\ v=\int dv=\int\frac{1}{x^2}\,dx=\int x^{-2}\,dx=\frac{x^{-1}}{-1}=-\frac{1}{x} \end{array}$$

3º) Para hacer los decorados de una película se necesita construir una pared de cartón como la de la figura adjunta. La curva superior de la pared viene dada por la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 10 & si\ \ 0 \le x \le 4 \\ -x^2 + 13x - 22 & si\ \ 4 \le x \le 8 \end{cases}$$

¿Cuál es la superficie S de la pared?



Resolución

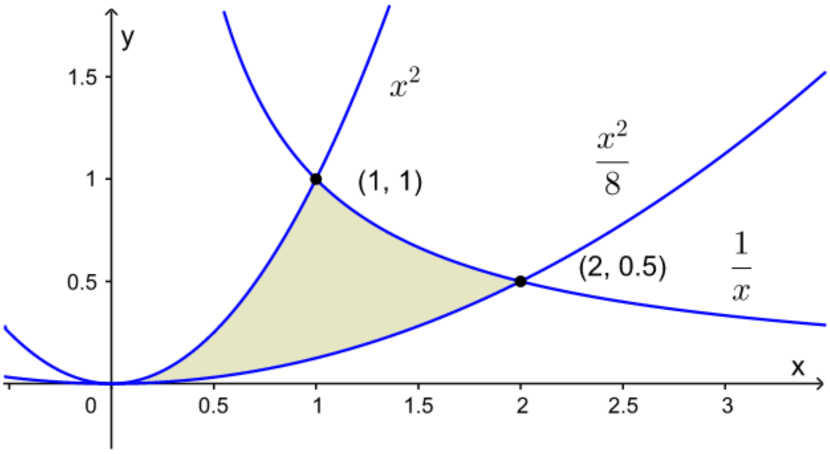
$$S = \int_0^8 f(x)\,dx = \int_0^4 \left(x^2 - 3x + 10\right)\,dx + \int_4^8 \left(-x^2 + 13x - 22\right)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 10x\right]_0^4 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{13x^2}{2} - 22x\right]_4^8 = \frac{112}{3} + \frac{208}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right) = \boxed{112\ \mathrm{u}^2}$$

4º) Sean las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \frac{x^2}{8}$.

Dibuja el recinto finito, en el primer cuadrante, limitado por las gráficas de esas tres funciones y calcula su área.

Resolución



$$S = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{8}\right)\,dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x^2}{8}\right)\,dx = \left[\frac{7x^3}{24}\right]_0^1 + \left[\ln x - \frac{x^3}{24}\right]_1^2 = \frac{7}{24} + \left(\ln 2 - \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{24}\right)\right) =$$

$$= \frac{7}{24} + \left(\ln 2 - \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{24}\right)\right) = \boxed{\ln 2 \approx 0{,}6931\ \mathrm{u}^2}$$

Puntuación

1, 3, -------------- 1,25 puntos
2 ------------------ 5 “
4 ------------------ 2,5 “