1º) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 y B la matriz $B=\frac{1}{2}A$. Sabiendo que $|B|=1$, calcula $|A|$

Resolución

$$|B|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}A\right|=1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot|A|=1 \Leftrightarrow \frac{1}{8}\cdot|A|=1 \Leftrightarrow |A|=8$$

2º) Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si cumple que $A\cdot A^t=I$ donde I es la matriz unidad y A^t es la traspuesta de A.

Determina las matrices de la forma $A=\begin{pmatrix} a & -a & b\\ a & a & 0\\ 0 & b & -1\end{pmatrix}$ que son ortogonales, siendo a y b parámetros reales.

Resolución

$$A\cdot A^t=I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -a & b\\ a & a & 0\\ 0 & b & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & a & 0\\ -a & a & b\\ b & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a^2+b^2 & 0 & -ab-b\\ 0 & 2a^2 & ab\\ -ab-b & ab & b^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Por igualdad de matrices tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} 2a^2+b^2=1 \overset{b=0}{\Rightarrow} 2a^2=1\\ -ab-b=0 \Rightarrow 0=0\\ 2a^2=1 \Rightarrow a=\pm\sqrt{2}/2\\ ab=0 \Rightarrow 0=0\\ b^2+1=1 \Rightarrow b=0 \end{array}\right. \qquad A=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \text{ y } A=\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0\\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

3º) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3\\ 3 & -1 & -3\\ -1 & -2 & -1\end{pmatrix}$

a) Calcula A^{-1}.

b) Halla la matriz X que verifica $A^t\cdot X+B=I$ siendo I la matriz unidad y **A^t la matriz traspuesta de A.**

Resolución

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix} \overset{C_3-2C_1}{\cong} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-1\neq 0$

Calculamos A^{-1}:

$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-3$; $A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=2$; $A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=1$

$A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=6$; $A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4$; $A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-3$

$A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2$; $A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$; $A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$

Matriz adjunta de A: $Adj(A)=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1\\ 6 & -4 & -3\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Matriz inversa de A: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot(Adj(A))^t=-\begin{pmatrix} -3 & 6 & -2\\ 2 & -4 & 1\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2\\ -2 & 4 & -1\\ -1 & 3 & -1\end{pmatrix}$

b) $A^t \cdot X + B = I \Leftrightarrow A^t \cdot X = I - B \quad ; \quad I - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Multiplicando por $(A^t)^{-1}$ a la izquierda, ambos miembros de la igualdad, tenemos:

$$(A^t)^{-1} \cdot A^t \cdot X = (A^t)^{-1} \cdot (I - B) \Leftrightarrow X = (A^t)^{-1} \cdot (I - B) \overset{(*)}{\cong} (A^{-1})^t \cdot (I - B)$$

$$X = (A^{-1})^t \cdot (I - B) \overset{a)}{\cong} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -3 & 14 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

(*) Justificación de que *la inversa de la traspuesta es la traspuesta de la inversa* del apartado a):

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow (A \cdot A^{-1})^t = I^t = I \Rightarrow (A^{-1})^t \cdot A^t = I \Rightarrow (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \overset{a)}{\cong} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Análogamente \;\; A^{-1} \cdot A = I \Rightarrow (A^{-1} \cdot A)^t = I^t = I \Rightarrow A^t \cdot (A^{-1})^t = I \Rightarrow (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

En cualquier caso siempre se puede calcular la inversa de la traspuesta.

4º) En una academia de idiomas se imparten clases de inglés, francés y alemán. Cada alumno está matriculado en un único idioma. El número de alumnos matriculados en inglés representa el 60% **del total de alumnos de la academia. Si diez alumnos de francés se hubiesen matriculado en alemán, ambos idiomas tendrían el mismo número de alumnos. Además, la cuarta parte de los alumnos de inglés excede en ocho al doble de la diferencia entre los alumnos matriculados en francés y alemán. Calcule el número de alumnos matriculados en cada idioma**.

Resolución

a) Sean

$x \equiv número\ de\ alumnos\ matriculados\ en\ inglés.$
$y \equiv número\ de\ alumnos\ matriculados\ en\ francés.$
$z \equiv número\ de\ alumnos\ matriculados\ en\ alemán.$

El número de alumnos matriculados en inglés representa el 60% del total de alumnos de la academia: $x = \frac{60}{100}(x + y + z)$

Si diez alumnos de francés se hubiesen matriculado en alemán, ambos idiomas tendrían el mismo número de alumnos:

$$y - 10 = z + 10$$

La cuarta parte de los alumnos de inglés excede en ocho al doble de la diferencia entre los alumnos matriculados en francés y alemán: $\frac{x}{4} = 8 + 2(y - z)$

El sistema de ecuaciones lineales que resuelve el problema es:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{60}{100}(x + y + z) \\ y - 10 = z + 10 \\ \frac{x}{4} = 8 + 2(y - z) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 40x - 60y - 60z = 0 \\ y - z = 20 \\ x - 8y + 8z = 32 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 8y + 8z = 32 \\ y - z = 20 \\ 2x - 3y - 3z = 0 \end{array} \right.$$

Resolvemos el sistema por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & 8 & 32 \\ 0 & 1 & -1 & 20 \\ 2 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -8 & 8 & 32 \\ 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 13 & -19 & -64 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -8 & -8 & 32 \\ 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & -6 & -324 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 8y + 8z = 32 \\ y - \;\; z = 20 \\ -6z = -324 \end{array} \right. \qquad de\ donde\ z = 54 \;\; ; \;\; y = 74 \;\; ; \;\; x = 192$$

5º) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real k:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + kz = k \\ kx + (k - 1)y + z = 2 \\ x + y + z \;\; = 1 \end{array} \right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.
b) Resuélvase para $k = 1$.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & k \\ k & k-1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Vemos el rango de la matriz A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2-C_1}{\cong} \begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ k & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = k-1$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow k-1 = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

Caso 1 $\forall k \in \mathbb{R}$ $k \neq 1$, $|A| \neq 0$. $rg(A) = 3 = rg(A^*) = Nº\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $k = 1$. En este caso $|A| = 0$ y $rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{Filas \\ iguales}}{\cong} 0$ y, por tanto, $rg(A^*) = 2$

$$2 = rg(A) = rg(A^*) < nº\ incógnitas.\quad Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

b) Resolvemos para $k = 1$.

Observando el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x \quad\ + z = 2 \end{cases}$$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$$z = t; \quad \begin{cases} x + y = 1 - t \\ \quad x \ = \ 2 - t \end{cases}$$

Despejando la incógnita y de la primera ecuación, obtenemos

$$y = 1 - t - x = 1 - t - 2 + t = -1$$

$$La\ solución\ viene\ dada\ por \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 \\ z = \quad t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Puntuación

1 ------------- 1 punto
2 ------------- 1,5 “
3 ------------- 3 “ (a) 1; (b) 2
4 ------------- 2 “
5 ------------ 2,5 “