1º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-1&1&3\\-2&1&3\\5&-1&m\end{pmatrix}$, **determina los valores del parámetro real** m **para que el sistema homogéneo** $A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ **tenga soluciones distintas de la trivial** $x=y=z=0$

Resolución

Para que el sistema homogéneo tenga soluciones distintas de la trivial, debe ser compatible indeterminado. Por tanto, el rango de la matriz A debe ser menor que 3 y, en consecuencia, su determinante 0.

$$|A|=\begin{vmatrix}-1&1&3\\-2&1&3\\5&-1&m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&3\\0&-1&-3\\0&4&m+15\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&-3\\4&m+15\end{vmatrix}=m+15-12=m+3$$

$$|A|=0\Leftrightarrow m+3=0\Leftrightarrow m=-3$$

2º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\2&0&3\end{pmatrix}$ **y** B=$\begin{pmatrix}0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0\\1&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, **calcula el determinante de las matrices** $(AB^t)^4$ **y** $2BA^{-1}$

Resolución

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&0\\2&0&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix}=-3\ ;\ |B|=\begin{vmatrix}0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0\\1&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\1&0\end{vmatrix}=\frac{1}{3}$$

$$|(AB^t)^4|\overset{(1)}{\widehat{=}}|AB^tAB^tAB^tAB^t|=|A|\cdot|B^t|\cdot|A|\cdot|B^t|\cdot|A|\cdot|B^t||A|\cdot|B^t|=|A|^4\cdot|B^t|^4\overset{|B|=|B^t|}{\widehat{=}}(-3)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4=1$$

$$|2BA^{-1}|\overset{(2)}{\widehat{=}}2^3\cdot|B|\cdot|A^{-1}|\overset{(3)}{\widehat{=}}\frac{8\cdot|B|}{|A|}=\frac{8\cdot\frac{1}{3}}{-3}=-\frac{8}{9}$$

(1): El determinante del producto de matrices cuadradas del mismo orden es el producto de *los* determinantes de cada matriz.

(2): Por ser matrices de orden 3.

(3): $A\cdot A^{-1}=I\Leftrightarrow|A\cdot A^{-1}|=|I|\Leftrightarrow|A|\cdot|A^{-1}|=1\Leftrightarrow|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

3º) Considera la matriz $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\2&3&0\end{pmatrix}$

En la ecuación $CX-X=2I$, **expresa** X **en función de** C **y de** I, **siendo** I **la matriz unidad de orden** 3**. Calcula la matriz** X**.**

Resolución

$$CX-X=2I\Leftrightarrow(C-I)X=2I\Leftrightarrow(C-I)^{-1}(C-I)X=(C-I)^{-1}2I\Leftrightarrow X=2(C-I)^{-1}$$

$$M=C-I=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\2&3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&-2&-1\\2&3&-1\end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix}0&1&1\\-1&-2&-1\\2&3&-1\end{vmatrix}\overset{C_2-C_3}{\widehat{=}}\begin{vmatrix}0&0&1\\-1&-1&-1\\2&4&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-1\\2&4\end{vmatrix}=-2\neq0$$

Calculamos M^{-1}:

$M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$; $M_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$; $M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$

$M_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4$; $M_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2$; $M_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1$; $M_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$; $M_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1$

Matriz adjunta de A: $Adj(A) = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz inversa de $M = C - I$: $(C-I)^{-1} = M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot (Adj(M))^t = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = 2(C-I)^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

4º) Una persona dispone de 21000 euros para invertir en bonos, fondos de inversión y acciones. La rentabilidad de esos activos es de un $5\%, 6\%\ y\ 10\ \%$ respectivamente. El inversor quiere invertir en acciones el doble que en bonos y, además, conseguir una rentabilidad del 7 %. ¿Cuánto ha de invertir en cada uno de esos bienes?

Resolución

a) Sean

$x \equiv número\ de\ euros\ invertidos\ en\ bonos.$
$y \equiv número\ de\ euros\ invertidos\ en\ fondos\ de\ inversión.$
$z \equiv número\ de\ euros\ invertidos\ en\ acciones.$

Debe cumplirse que:
Total de dinero: $x + y + z = 21000$
Rentabilidad prevista y deseada: $0{,}05x + 0{,}06y + 0{,}10z = 0{,}07 \cdot 21000$
Inversión en acciones: $z = 2x$

Las tres ecuaciones originan un sistema de ecuaciones lineales que resuelve el problema:

$$\begin{cases} x + y + z = 21000 \\ 5x + 6y + 10z = 147000 \\ 2x \quad\quad - z = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 5 & 6 & 10 & 147000 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 0 & 1 & 5 & 42000 \\ 0 & -2 & -3 & -42000 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 0 & 1 & 5 & 42000 \\ 0 & 0 & 7 & 42000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 21000 \\ y + 5z = 42000 \\ 7z = 42000 \end{cases} \quad de\ donde\ z = 6000\ € \ ;\ y = 12000\ €\ ;\ x = 3000\ €$$

5º) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real m:

$$\begin{cases} x - my - z = 0 \\ mx - 4y + (6-2m)z = -8m \\ -x + 2y + z = 6 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de m.
b) Resuélvase cuando sea compatible indeterminado.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & -m & -1 \\ m & -4 & 6-2m \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -m & -1 & 0 \\ m & -4 & 6-2m & -8m \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Vemos el rango de la matriz A:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -m & -1\\ m & -4 & 6-2m\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix} \overset{C_3+C_1}{\cong} \begin{vmatrix}1 & -m & 0\\ m & -4 & 6-m\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=(m-6)\begin{vmatrix}1 & -m\\ -1 & 2\end{vmatrix}=(m-6)(2-m)$$

$$|A|=0 \Leftrightarrow (m-6)(2-m)=0 \Leftrightarrow m=6\,;\; m=2$$

Caso 1 $\forall m\in\mathbb{R}\;\; m\neq 2,6\,,|A|\neq 0.\; rg(A)=3=rg(A^*)=Nº\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $m=2$. En este caso $|A|=0\;\; y\;\; rg(A)<3$.

Matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & -4 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0\\ 2 & -4 & 2 & -16\\ -1 & 2 & 1 & 6\end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -4 & 2\end{vmatrix}=-8\neq 0, rg(A)=2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -4 & 2\end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$$\begin{vmatrix}-2 & -1 & 0\\ -4 & 2 & -16\\ 2 & 1 & 6\end{vmatrix} \overset{C_1-2C_2}{\cong} \begin{vmatrix}0 & -1 & 0\\ -8 & 2 & -16\\ 0 & 1 & 6\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 6\end{vmatrix}=-48\neq 0\quad \text{y, por tanto, } rg(A^*)=3$$

$$2=rg(A)\neq rg(A^*).\;\; Sistema\ Incompatible$$

Caso 3 $m=6$. En este caso $|A|=0\;\; y\;\; rg(A)<3$.

Matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix}1 & -6 & -1\\ 6 & -4 & -6\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix}1 & -6 & -1 & 0\\ 6 & -4 & -6 & -48\\ -1 & 2 & 1 & 6\end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix}1 & -6\\ 6 & -4\end{vmatrix}=32\neq 0, rg(A)=2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix}1 & -6\\ 6 & -4\end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$$\left|\begin{pmatrix}1 & -6 & 0\\ 6 & -4 & -48\\ -1 & 2 & 6\end{pmatrix}\right| \overset{C_2+6C_1}{\cong} \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 6 & 32 & -48\\ -1 & -4 & 6\end{vmatrix}=0\quad \text{y, por tanto, } rg(A^*)=2$$

$$2=rg(A)=rg(A^*)<nº\ incógnitas.\;\; Sistema\ Compatile\ Indeterminado$$

b) Resolvemos para $m=6$.

Observando el menor $\begin{vmatrix}1 & -6\\ 6 & -4\end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es

$$\begin{cases} x-6y-z=0\\ 6x-4y-6z=-48\end{cases}$$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix}1 & -6\\ 6 & -4\end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$$z=t;\quad \begin{cases} x-6y=t\\ 6x-4y=-48+6t\end{cases}$$

Multiplicando por -3 la primera ecuación y simplificando por 2 la segunda:

$$z=t;\quad \begin{cases} -3x+18y=-3t\\ 3x\;-2y=-24+3t\end{cases}$$

Sumando miembro a miembro: $16y=-24$; $\;de\ donde\ y=-\frac{3}{2}$

De la primera ecuación $x=t+6y=t-9$

$$La\ solución\ viene\ dada\ por\quad \begin{cases} x = -9 + t \\ y = -\dfrac{3}{2} \\ z = \quad\quad t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Puntuación

1 ------------- 1 punto
2 ------------- 2
3 ------------ 2
4 ----------- 2 “
5 ------------ 3 “ (a) 2 ; (b) 1