UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2020-2021**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente <u>cuatro</u> preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A, B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

$$f(x)=2+x-x^2, \quad g(x)=2x^2-4x$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea la recta $r \equiv \begin{cases} -x-y+z=0 \\ 2x+3y-z+1=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x+y-z+3=0$. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular el ángulo que forman r y π.
b) (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z-y=0$.
c) (0.75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8.8 meses y una desviación típica de 3 meses.

a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?

b) (1 punto) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?

c) (0.5 puntos) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo *(8.8 – c, 8.8 + c)* incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{l} ax-2y+(a-1)z=4 \\ -2x+3y-6z=2 \\ -ax+y-6z=6 \end{array}\right\}$$

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $a = 1$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} senx & si \quad x<0 \\ xe^{x} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.
b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi, 2)$. Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0,1]$ de manera que $f(x_0) = 2$.
c) (0.75 puntos) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean los planos $\pi_1 \equiv x+y=1$ y $\pi_2 \equiv x+z=1$.

a) (1.5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.
b) (0.5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto (0, 2, 0) y es perpendicular al plano π_2.
c) (0.5 puntos) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0.16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0.33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0.08.

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?
b) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?
c) (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2" y "en un día se supera el nivel permitido de partículas"?
d) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A, B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

Llamamos x = número de acciones de A, y = número de acciones de B, z = número de acciones de C. Luego se las reparten por igual entre ellos.

"*Hay un total de 540 acciones*" → $x+y+z=540$

"*Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro y valoradas en 1560 euros*" → "*Cada acción de B es 1 €, cada acción de A es 3 · 1 = 3 € y cada acción de C es 2 · 3 = 6 €. Todas juntas valen 1560 €*" → $3x+y+6z=1560$

"El número de acciones de C es la mitad que el de B" → $z=\frac{y}{2}$

Todas estas ecuaciones forman un sistema que resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=540 \\ 3x+y+6z=1560 \\ z=\frac{y}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=540 \\ 3x+y+6z=1560 \\ 2z=y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z+z=540 \\ 3x+2z+6z=1560 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3z=540 \\ 3x+8z=1560 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=540-3z \\ 3x+8z=1560 \end{array}\right\} \Rightarrow 3(540-3z)+8z=1560 \Rightarrow 1620-9z+8z=1560 \Rightarrow -z=-60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=60} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=540-3\cdot 60=540-180=360} \\ \boxed{y=2\cdot 60=120} \end{cases}$$

Hay un total de 360 acciones de A, 120 de B y 60 de C.

A cada hermano le tocan 120 acciones de la empresa A, 40 de la empresa B y 20 de la C.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

$$f(x)=2+x-x^2, \quad g(x)=2x^2-4x$$

Averiguamos sus puntos de corte para establecer el comienzo y final de la región limitada por ambas gráficas.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow 2+x-x^2=2x^2-4x \Rightarrow 0=3x^2-5x-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4(3)(-2)}}{6}=\frac{5\pm 7}{6}=\begin{cases}\dfrac{5+7}{6}=2\\[2mm] \dfrac{5-7}{6}=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

El área será el valor absoluto de la integral definida entre $-\frac{1}{3}$ y 2 de la diferencia de las funciones.

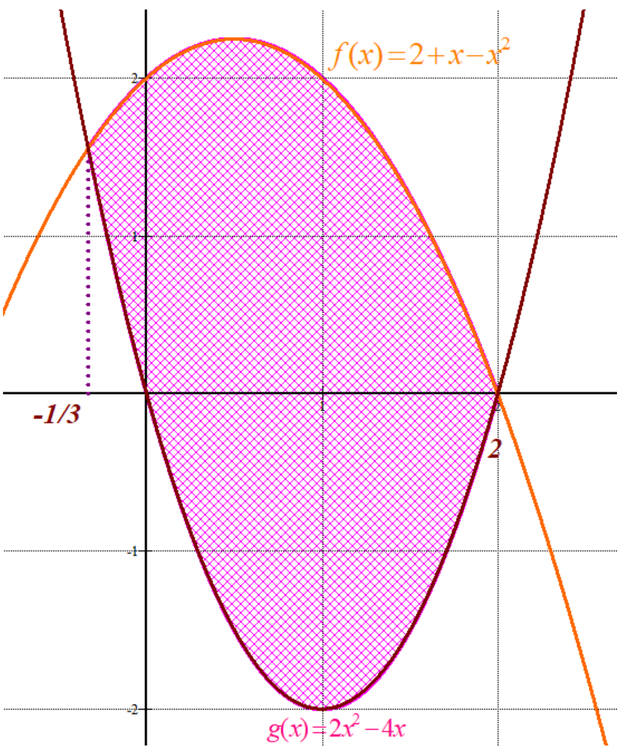
$$\int_{-\frac{1}{3}}^{2} f(x)-g(x)dx=\int_{-\frac{1}{3}}^{2} 2+x-x^2-\left(2x^2-4x\right)dx=\int_{-\frac{1}{3}}^{2} 2+x-x^2-2x^2+4xdx=\int_{-\frac{1}{3}}^{2} -3x^2+5x+2dx=$$

$$=\left[-x^3+\frac{5}{2}x^2+2x\right]_{-\frac{1}{3}}^{2}=\left[-2^3+\frac{5}{2}2^2+2\cdot 2\right]-\left[-\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(-\frac{1}{3}\right)\right]=$$

$$=-8+10+4-\frac{1}{27}-\frac{5}{18}+\frac{2}{3}=\frac{343}{54}\simeq 6.35$$

$$\boxed{\text{Área}=\left|\int_{-\frac{1}{3}}^{2} f(x)-g(x)dx\right|=\frac{343}{54}\simeq 6.35\,u^2}$$

Dibujamos el recinto como comprobación:



A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

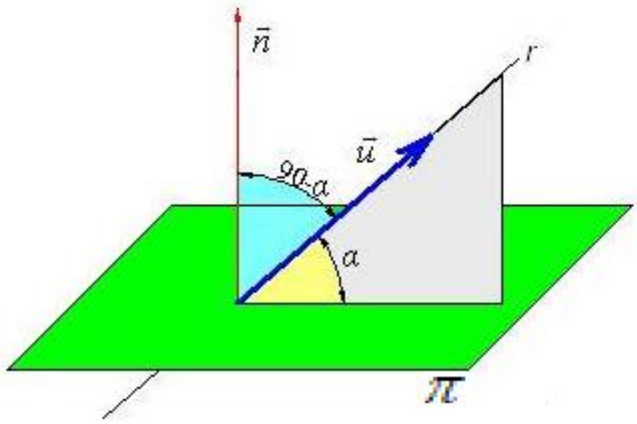
Sea la recta $r \equiv \begin{cases} -x-y+z=0 \\ 2x+3y-z+1=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x+y-z+3=0$. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular el ángulo que forman *r* y π.

b) (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta *r* y el plano π con respecto al plano $z-y=0$.

c) (0.75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta *r* sobre el plano π.

a)



El ángulo lo obtenemos a partir del ángulo que forman el vector normal del plano y el director de la recta.

$$\pi \equiv 2x+y-z+3=0 \Rightarrow \vec{n}=(2,1,-1)$$

$$r \equiv \begin{cases} -x-y+z=0 \\ 2x+3y-z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=x+y \\ 2x+3y-z+1=0 \end{cases} \Rightarrow 2x+3y-x-y+1=0 \Rightarrow x+2y+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-1-2y \Rightarrow z=-1-2y+y=-1-y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1-2t \\ y=t \\ z=-1-t \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(-2,1,-1) \\ P_r(-1,0,-1) \end{cases}$$

Utilizamos la fórmula del producto escalar:

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n}=(-2,1,-1)(2,1,-1)=-4+1+1=-2 \\ \left|\overrightarrow{v_r}\right|=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6} \\ \left|\vec{n}\right|=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{v_r},\vec{n}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{6}}$$

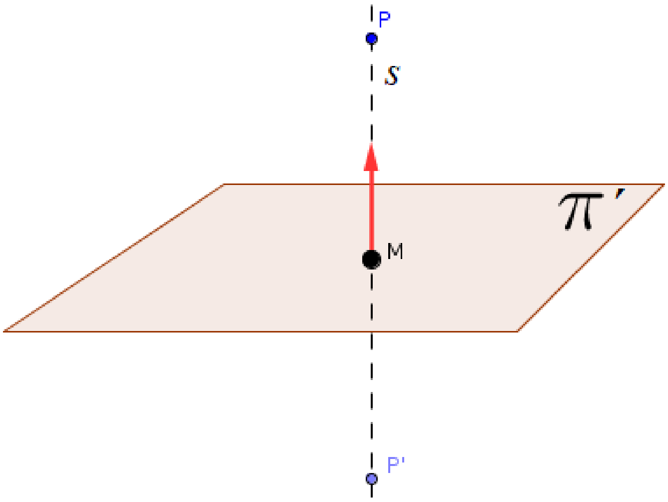
$$\cos\left(\overrightarrow{v_r},\vec{n}\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \Rightarrow \left(\overrightarrow{v_r},\vec{n}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=70.5^{\circ}$$

El ángulo que forman recta y plano es 90º – 70.5º = 19.5º.

b) Hallamos el punto P de intersección de la recta *r* y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv 2x+y-z+3=0 \\ r\equiv\begin{cases}x=-1-2t\\ y=t\\ z=-1-t\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 2(-1-2t)+t-(-1-t)+3=0\Rightarrow -2-4t+t+1+t+3=0\Rightarrow$$

$$-2t+2=0\Rightarrow t=\frac{-2}{-2}=1\Rightarrow\begin{cases}x=-1-2=-3\\ y=1\\ z=-1-1=-2\end{cases}\Rightarrow P(-3,1,-2)$$



El plano tiene ecuación $\pi'\equiv -y+z=0\Rightarrow \vec{n}=(0,-1,1)$. Hallamos la recta s perpendicular al plano π´ que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_s}=\vec{n}=(0,-1,1)\\ P(-3,1,-2)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}x=-3\\ y=1-t\\ z=-2+t\end{cases}$$

Hallamos el punto M de corte de recta s y plano π´.

$$\left.\begin{array}{l}s\equiv\begin{cases}x=-3\\ y=1-t\\ z=-2+t\end{cases}\\ \pi'\equiv -y+z=0\end{array}\right\}\Rightarrow -(1-t)-2+t=0\Rightarrow -1+t-2+t=0\Rightarrow 2t=3\Rightarrow t=\frac{3}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-3\\ y=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}\\ z=-2+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow M\left(-3,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

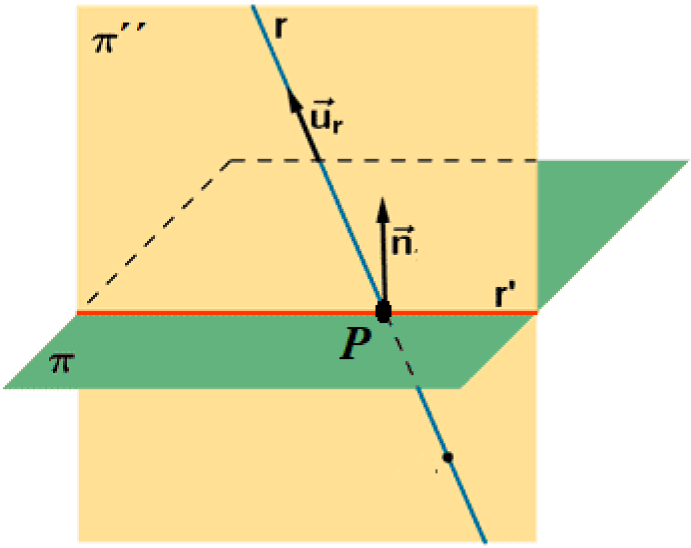
El punto P’ es el resultado de sumarle al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM}=\left(-3,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)-(-3,1,-2)=\left(0,-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$\boxed{P'=\left(-3,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)+\left(0,-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=(-3,-2,1)}$$

c) r y π se cortan en el punto $P(-3,1,-2)$. Este punto pertenece a la proyección pedida.

Hallamos el plano π ´´ perpendicular al plano π que contiene a la recta r.
Este plano tiene como vectores directores el normal del plano π y el director de la recta. El punto P pertenece al plano π ´´.



$$\left.\begin{array}{r}\pi\equiv 2x+y-z+3=0\Rightarrow \vec{n}=(2,1,-1)\\ \vec{v_r}=(-2,1,-1)\\ P(-3,1,-2)\in\pi''\end{array}\right\}\Rightarrow \pi''\equiv\begin{vmatrix}x+3 & y-1 & z+2\\ 2 & 1 & -1\\ -2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\pi''\equiv \cancel{-x}-3+2y-2+2z+4+2z+4+2y-2+\cancel{x}+3=0\Rightarrow \pi''\equiv 4y+4z+4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi''\equiv y+z+1=0$$

La recta r' que es la proyección de r sobre el plano π es la intersección de los planos π y π´´, por lo que sus ecuaciones son:

$$\left.\begin{array}{l}\pi''\equiv y+z+1=0\\ \pi\equiv 2x+y-z+3=0\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{r'\equiv\begin{cases}y+z+1=0\\ 2x+y-z+3=0\end{cases}}$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8.8 meses y una desviación típica de 3 meses.

a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?

b) (1 punto) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?

c) (0.5 puntos) ¿Qué valor de *c* es tal que el intervalo *(8.8 – c, 8.8 + c)* incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?

a) X = Tiempo de vida (en meses) de un individuo de cierta especie animal.
X = N(8.8, 3)

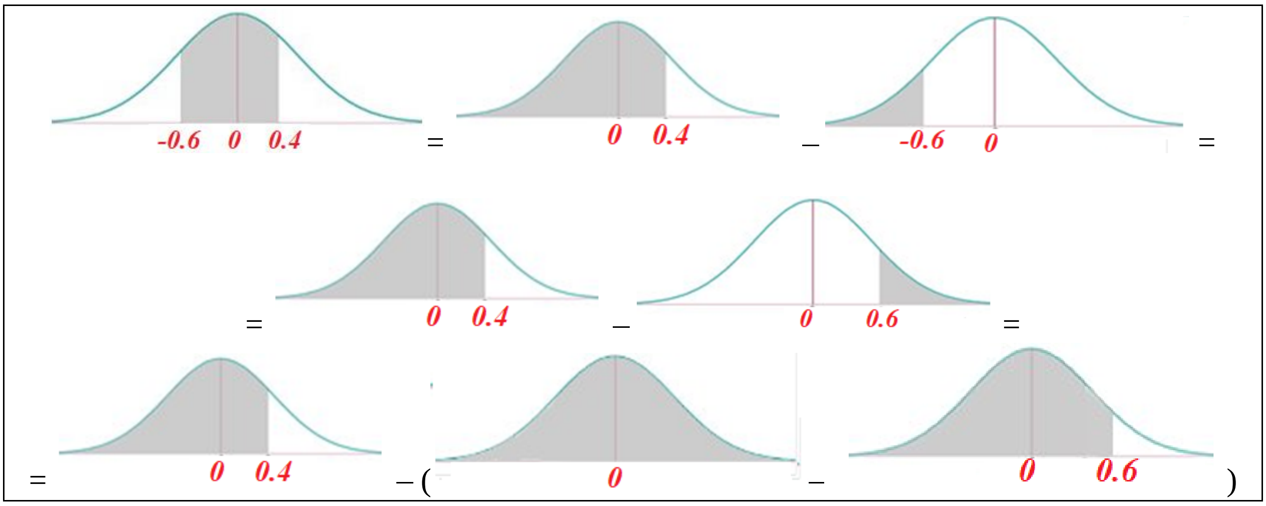
$$P(X \geq 10) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{10-8.8}{3}\right) = P(Z \geq 0.4) = \ldots$$

$$\ldots = 1 - P(Z < 0.4) = \{\text{Miro en la tabla N(0,1)}\} = 1 - 0.6554 = \boxed{0.3446 = 34.46\%}$$

z	0.00	0.
0.0	0.5000	0.5
0.1	0.5398	0.5
0.2	0.5793	0.5
0.3	0.6179	0.6
0.4	0.6554	0.6
0.5	0.6915	0.6

También piden

$$P(7 \leq X \leq 10) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{7-8.8}{3} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{10-8,8}{3}\right) = P(-0.6 \leq Z \leq 0.4) = \ldots$$



$$\ldots = P(Z \le 0.4) - P(Z \le -0.6) = P(Z \le 0.4) - P(Z \ge 0.6) = P(Z \le 0.4) - (1 - P(Z \le 0.6)) =$$

$$= \{\text{Miro en la tabla N(0,1)}\} = 0.6554 - (1 - 0.7257) = \boxed{0.3811 = 38.11\%}$$

z	0.00	0.0
0.0	0.5000	0.50
0.1	0.5398	0.54
0.2	0.5793	0.58
0.3	0.6179	0.62
0.4	0.6554	0.65
0.5	0.6915	0.69
0.6	0.7257	0.72
0.7	0.7580	0.76

b) La probabilidad de que un espécimen no supere los 10 meses es:

$$p = P(X < 10) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{10 - 8.8}{3}\right) = P(Z < 0.4) = 0.6554$$

Y = Número de especímenes que no superan los 10 meses de un grupo de 4.
Esta variable aleatoria es una binomial con parámetros n = 4 y p = 0.6554. Y = B(4, 0.6554)
Nos piden calcular $P(Y \ge 1)$

$$P(Y \ge 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{4}{0} 0.6554^0 (1 - 0.6554)^4 = 1 - 0.3446^4 = \boxed{0.9859}$$

c)

$$P(8.8 - c < X < 8.8 + c) = 0.98 \Rightarrow P\left(\frac{8.8 - c - 8.8}{3} < Z < \frac{8.8 + c - 8.8}{3}\right) = 0.98 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-c}{3} < Z < \frac{c}{3}\right) = 0.98 \Rightarrow P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - P\left(Z < -\frac{c}{3}\right) = 0.98 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - P\left(Z \ge \frac{c}{3}\right) = 0.98 \Rightarrow P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - \left[1 - P\left(Z < \frac{c}{3}\right)\right] = 0.98 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - 1 + P\left(Z < \frac{c}{3}\right) = 0.98 \Rightarrow 2 \cdot P\left(Z < \frac{c}{3}\right) = 0.98 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{c}{3}\right) = \frac{1.98}{2} = 0.99 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Buscamos en la tabla N(0,1)} \\ \text{la probabilidad de 0.99}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{c}{3} \simeq 2.325 \Rightarrow \boxed{c \simeq 6.975}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	[illegible]	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834
[illegible]	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871
2.3	[illegible]	[illegible]	0.9898	0.9901
[illegible]	0.9918	0.9920	[illegible]	[illegible]

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{l} ax-2y+(a-1)z=4 \\ -2x+3y-6z=2 \\ -ax+y-6z=6 \end{array}\right\}$$

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de *a*.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para *a = 1*.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} a & -2 & a-1 \\ -2 & 3 & -6 \\ -a & 1 & -6 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} a & -2 & a-1 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -a & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante y vemos para que valores de *a* se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -2 & a-1 \\ -2 & 3 & -6 \\ -a & 1 & -6 \end{vmatrix}=-18a-12a-2a+2+3a(a-1)+24+6a=3a^2-29a+26$$

$$|A|=0\Rightarrow 3a^2-29a+26=0\Rightarrow a=\frac{29\pm\sqrt{(-29)^2-4(3)(26)}}{6}=\frac{29\pm\sqrt{(-29)^2-4(3)(26)}}{6}\Rightarrow$$

$$a=\frac{29\pm 23}{6}=\begin{cases} \dfrac{29+23}{6}=\dfrac{52}{6}=\dfrac{26}{3}=a \\ \dfrac{29-23}{6}=1=a \end{cases}$$

Surgen tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a\neq\frac{26}{3}$ y $a\neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (solución única)

CASO 2. $a=1$

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$. Utilizamos Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 2^a + 2\cdot\text{Fila } 1^a} \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 8 \\ \hline 0 & -1 & -6 & 10 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva fila } 2^a} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a} \\ -1 & 1 & -6 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \\ \hline 0 & -1 & -6 & 10 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva fila } 3^a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a} \\ 0 & -1 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & 6 & 10 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva fila } 3^a} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Equivalente a } A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la ampliada es 2, siendo el número de incógnitas 3. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

CASO 3. $a = \frac{26}{3}$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} \frac{26}{3} & -2 & \frac{23}{3} & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -\frac{26}{3} & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$ Utilizamos Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} \frac{26}{3} & -2 & \frac{23}{3} & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -\frac{26}{3} & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\cdot\text{Fila } 1^a \to \text{Nueva Fila } 1^a \\ 3\cdot\text{Fila } 3^a \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 26 & -6 & 23 & 12 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -26 & 3 & -18 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{13\cdot\text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a} \\ -26 & 39 & -78 & 26 \\ 26 & -6 & 23 & 12 \\ \hline 0 & 33 & -55 & 38 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila } 2^a} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a} \\ -26 & 3 & -18 & 18 \\ 26 & -6 & 23 & 12 \\ \hline 0 & -3 & 5 & 30 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila } 3^a} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 26 & -6 & 23 & 12 \\ 0 & 33 & -55 & 38 \\ 0 & -3 & 5 & 30 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 2^a + 11\cdot\text{Fila } 3^a} \\ 0 & 33 & -55 & 38 \\ 0 & -33 & 55 & 330 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 368 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila } 3^a} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Equivalente a A/B} \begin{pmatrix} 26 & -6 & 23 & 12 \\ 0 & 33 & -55 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 368 \end{pmatrix}$$

.

El rango de la matriz A es 2 y el de la ampliada es 3. El sistema es incompatible.

b) Para $a = 1$ hemos obtenido un sistema equivalente en el CASO 2 del apartado a).

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando esta transformación el sistema inicial es equivalente al sistema siguiente que resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y \qquad = 4 \\ -2x+3y-6z=2 \\ -x+y-6z=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y \quad = 4 \\ -y-6z=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=4+2y \\ -6z=10+y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=4+2y \\ z=\dfrac{10+y}{-6} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=4+2t \\ y=t \qquad , \quad t\in\mathbb{R} \\ z=\dfrac{10+t}{-6} \end{cases}}$$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} senx & si \quad x<0 \\ xe^x & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de *f* en *x = 0*.
b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f* restringida a *(−π, 2)*. Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0,1]$ de manera que *f(x₀) = 2*.

c) (0.75 puntos) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx$.

a) Para que sea continua deben ser iguales el valor de la función y sus límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0e^0=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} senx=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} xe^x=0e^0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0$$

La función es continua en *x = 0*.

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ y su derivada es:

$$f(x)=\begin{cases} senx & si \quad x<0 \\ xe^x & si \quad x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} \cos x & si \quad x<0 \\ e^x+xe^x & si \quad x>0 \end{cases}$$

Para que sea derivable en *x = 0* deben coincidir sus derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} \cos x=1 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^x+xe^x=e^0+0e^0=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+)=1 \Rightarrow f'(0)=1$$

La función es derivable en *x = 0*.

b) Gracias a la continuidad de la función podemos dividir el estudio en dos partes: *(−π, 0)* y *(0, 2)*.

En *(−π, 0)* la función es $f(x)=senx$ y su derivada es $f'(x)=\cos x$, que se anula en $-\frac{\pi}{2}$.

Vemos como evoluciona la función antes y después de este valor.

- En $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ tomamos $x=-\frac{3\pi}{4}$ y la derivada es $f'\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)<0$. La función decrece en $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$.
- En $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ tomamos $x=-\frac{\pi}{4}$ y la derivada es $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)>0$. La función crece en $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$.

En (0, 2) la función es $f(x) = xe^x$ y su derivada es $f'(x) = e^x + xe^x$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x + xe^x = 0 \Rightarrow e^x(1+x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 \text{ No es posible} \\ 1+x = 0 \Rightarrow x = -1 \notin (0,2) \end{cases}$$

La derivada no se anula y la función siempre es creciente, ya que
$f'(x) = e^x + xe^x > 0 \; si \; 0 < x < 2$

Resumiendo: La función decrece en $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ y crece en $\left(-\frac{\pi}{2}, 2\right)$

Segunda pregunta. En el intervalo $[0,1]$ nuestra función es $f(x) = xe^x$, que es continua en el intervalo, además $f(0) = 0$ y $f(1) = e$, como $2 \in [0, e]$ por el teorema de los valores intermedios existe un $c \in (0,1)$ tal que *f(c) = 2.*

c)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} senxdx + \int_{0}^{1} xe^x dx = \boxed{1} + \boxed{2} = \ldots$$

$$\boxed{1} = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = -\cos 0 + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 0 = -1$$

$$\boxed{2} \Rightarrow \int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

$$\int_0^1 xe^x dx = \left[xe^x - e^x\right]_0^1 = \left[1e^1 - e^1\right] - \left[(0)e^0 - e^0\right] = e - e + 1 = 1$$

$$\ldots = -1 + 1 = \boxed{0}$$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean los planos $\pi_1 \equiv x+y=1$ y $\pi_2 \equiv x+z=1$.
a) (1.5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.
b) (0.5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto (0, 2, 0) y es perpendicular al plano π_2.
c) (0.5 puntos) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes *x* e *y*.

a) Si los planos son paralelos a $\pi_1 \equiv x+y=1$ entonces tienen ecuación $\pi_3 \equiv x+y=D$ y $\pi_4 \equiv x+y=E$.

Como $d(\pi_3,(0,0))=2$ y $d(\pi_4,(0,0))=2$.

$$\left.\begin{array}{r}\pi_3 \equiv x+y-D=0 \\ d(\pi_3,(0,0,0))=2\end{array}\right\} \Rightarrow 2=\frac{|0+0-D|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} \Rightarrow 2\sqrt{2}=|D| \Rightarrow \begin{cases} D=2\sqrt{2} \\ o \\ D=-2\sqrt{2}\end{cases}$$

Estos serían los dos planos pedidos: $\pi_3 \equiv x+y=2\sqrt{2}$ y $\pi_4 \equiv x+y=-2\sqrt{2}$

b) Si la recta es perpendicular al plano tiene como vector director el normal del plano.

$$\left.\begin{array}{r}\pi_2 \equiv x+z=1 \Rightarrow \vec{v}_r=\vec{n}=(1,0,1) \\ (0,2,0)\in r\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r \equiv \frac{x}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{1}}$$

c) Hallemos los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes *x* e *y*.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv x+y=1 \\ ejeOX \equiv \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0\end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow t+0=1 \Rightarrow t=1 \Rightarrow A(1,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv x+y=1 \\ ejeOY \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0\end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 0+t=1 \Rightarrow t=1 \Rightarrow B(0,1,0)$$

Hallamos las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ y la distancia entre los puntos es el módulo del vector.

$$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)-(1,0,0)=(-1,1,0)$$

$$\boxed{d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}\ u}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0.16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0.33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0.08.

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?

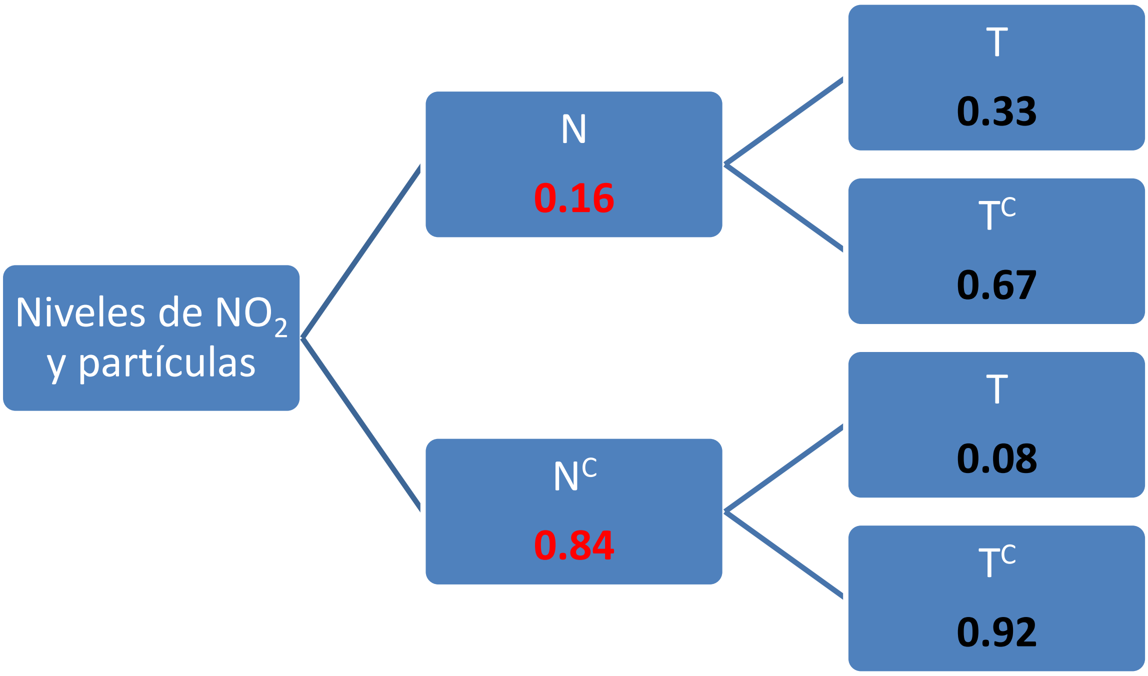
b) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?

c) (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2" y "en un día se supera el nivel permitido de partículas"?

d) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

Llamamos N = "Nivel de NO_2 superior al permitido".
T = "Nivel de partículas superior al permitido"

Realizamos un diagrama de árbol.



a) $P(N \cap T) = P(N)P(T/N) = 0.16 \cdot 0.33 = \boxed{0.0528}$

b) Con el suceso contrario la probabilidad de que al menos se supere uno de los indicadores sería 1 – Probabilidad de que ninguno de los se supere.

$$P(\text{Al menos se supere uno de los indicadores}) = 1 - P(\overline{N} \cap \overline{T}) =$$
$$= 1 - P(\overline{N})P(\overline{T}/\overline{N}) = 1 - 0.84 \cdot 0.92 = \boxed{0.2272}$$

c) ¿Son independientes los sucesos N y T?

Calculamos la probabilidad de la intersección de ambos sucesos y la probabilidad de ambos por separado y vemos si $P(N \cap T) = P(N)P(T)$.

$P(N \cap T) = \{\text{apartado a)}\} = 0.0528$

$P(N) = 0.16$

$P(T) = P(N \cap T) + P(\overline{N} \cap T) = 0.16 \cdot 0.33 + 0.84 \cdot 0.08 = \dfrac{3}{25} = 0.12$

$$\left.\begin{array}{l} P(N \cap T) = 0.0528 \\ P(N)P(T) = 0.16 \cdot 0.12 = 0.0192 \end{array}\right\} \Rightarrow P(N \cap T) \neq P(N)P(T)$$

Los sucesos no son independientes.

d) Es una probabilidad a posteriori.

$$P(N/\overline{T}) = \frac{P(N \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{P(N)P(\overline{T}/N)}{P(\overline{T})} = \frac{0.16 \cdot 0.67}{1 - 0.12} = \boxed{\frac{67}{550} \simeq 0.1218}$$