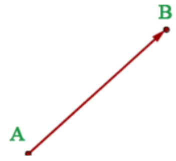
Tema 13: Espacio vectorial

1. Vectores en el espacio

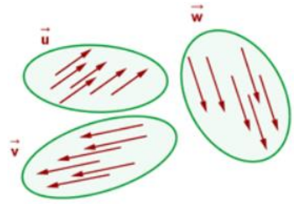
Un **vector fijo** del espacio es un segmento $\overline{AB}$ ordenado donde A y B son puntos del espacio. Lo representaremos por $\overrightarrow{AB}$, siendo A el origen y B el extremo.



Al igual que en el plano, un vector del espacio $\overrightarrow{AB}$ se caracteriza por su:

- **módulo**: longitud del segmento $\overline{AB}$. Lo expresamos $|\overrightarrow{AB}|$.
- **dirección**: la de la recta que lo contiene.
- **sentido**: el del origen hacia el extremo.

Se dice que dos vectores fijos son **equipolentes** si tienen el mismo módulo, dirección y sentido.
Vector libre $\vec{v}$ es el conjunto de vectores equipolentes a uno dado.

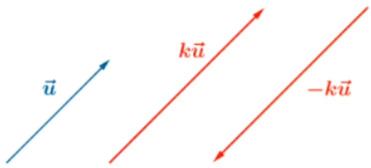


Llamaremos V al conjunto de los vectores libres del espacio.

2. Operaciones con vectores

2.1 Producto por número real

Sea $k \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} \in V$. Definimos el producto $k \cdot \vec{u}$ como el vector libre que tiene por módulo $|k|$ veces el de $\vec{u}$, dirección la del vector $\vec{u}$ y, sentido el de $\vec{u}$ si $k > 0$ o contrario a $\vec{u}$ si $k < 0$.
$k \cdot \vec{u} \in V$.



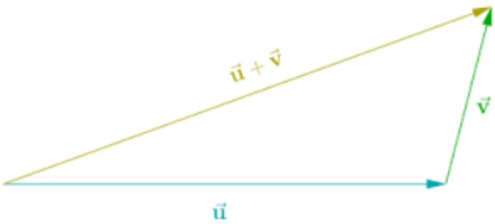
2.1.1 Propiedades del producto por números reales

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$, se cumple:

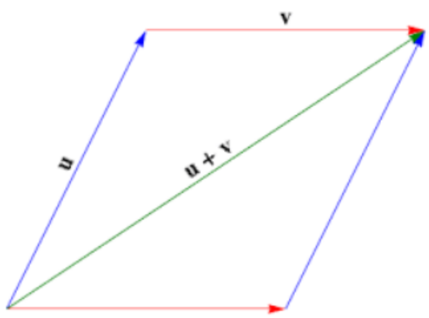
P1] Distributiva respecto de la suma de vectores: $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$
P2] Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$
P3] Asociativa: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u})$
P4] $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

2.2. Suma de vectores libres

Gráficamente, para sumar dos vectores libres $\vec{u}\ y\ \vec{v}$, hacemos coincidir el extremo del primero con el origen del segundo. El vector suma se obtiene uniendo el origen de $\vec{u}$ con el extremo de $\vec{v}$.



También podemos utilizar la regla del paralelogramo:



2.2.1 Propiedades de la suma de vectores libres

$\forall\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$, se cumple:

S1] Asociativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\ \vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\ \vec{w})$

S2] Conmutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

S3] Elemento neutro: $\exists\vec{0}\in V$ tal que $\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

S4] Elemento opuesto: $\forall\vec{u}\in V\ \ \exists(-\vec{u})\in V$ tal que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

3. El espacio vectorial de los vectores libres del espacio V

Con las propiedades descritas en los apartados anteriores, se dice que el conjunto V de los vectores libres del espacio tiene estructura de espacio vectorial.

3.1 Combinaciones lineales, vectores linealmente dependientes e independientes. Base

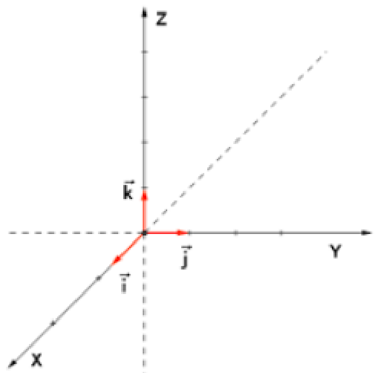
- Se dice que un vector $\vec{u}$ es **combinación lineal** de un conjunto de vectores $\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\ldots\overrightarrow{u_n}\}$ si existen números reales $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n$ tales que $\vec{u}=\alpha_1\cdot\overrightarrow{u_1}+\alpha_2\cdot\overrightarrow{u_2}+\cdots+\alpha_n\cdot\overrightarrow{u_n}$.
- Se dice que un conjunto de vectores $\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\ldots\overrightarrow{u_n}\}$ es **linealmente dependiente (L.D)** si, al menos, uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás; en caso contrario, se dice que son **linealmente independientes (L.I)**.
- Un conjunto de vectores $\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\ldots\overrightarrow{u_n}\}$ es un **sistema de generadores** si cualquier vector del espacio se puede expresar como combinación lineal de ellos.
- **Base** de un espacio vectorial es cualquier conjunto de vectores que sea linealmente independiente y sistema de generadores.

La dimensión de un espacio vectorial es el cardinal de cualquiera de sus bases.

En el espacio tridimensional V, el número máximo de vectores linealmente independientes es tres. Así, tres vectores L.I constituyen una base y su dimensión es 3.

Al igual que en el plano, la base canónica del espacio es la formada por los vectores $B=\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ siendo $\vec{\imath}=(1,0,0)$, $\vec{\jmath}=(0,1,0)$ y $\vec{k}=(0,0,1)$:

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0\Longrightarrow rg\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=3\Longrightarrow$$ son linealmente independientes.

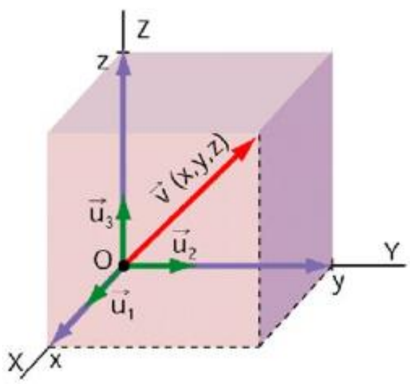


3.2 Componentes de un vector en una base

Un vector $\vec{v}\in V$ se puede expresar en función de los vectores de una base $B=\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\}$:

$$\vec{v}=x\cdot\overrightarrow{u_1}+y\cdot\overrightarrow{u_2}+z\cdot\overrightarrow{u_3}$$

Se llaman **componentes del vector** $\vec{v}$ en la base $B=\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\}$ a la terna (x,y,z) y lo escribiremos $\vec{v}(x,y,z)$ en B. Estas componentes son únicas en dicha base.



Ejemplo 1

Comprueba que el conjunto de vectores $B = \{\overrightarrow{u_1} = (1, -1, 0), \overrightarrow{u_2} = (0, 1, -2), \overrightarrow{u_3} = (1, 1, 2)\}$ forman una base del espacio $\mathbb{R}^3$ y halla las componentes del vector $\vec{u} = (4, -3, 4)$ en dicha base.

Solución

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,\ rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$. El conjunto de vectores B es linealmente independientes, al tratarse de tres vectores del espacio, forman base.

Expresamos el vector $\vec{u} = (4, -3, 4)$ como combinación lineal de los de la base:

$$(4, -3, 4) = \alpha \cdot (1, -1, 0) + \beta \cdot (0, 1, -2) + \gamma \cdot (1, 1, 2)$$
$$(4, -3, 4) = (\alpha, -\alpha, 0) + (0, \beta, -2\beta) + (\gamma, \gamma, 2\gamma)$$
$$(4, -3, 4) = (\alpha + \gamma, -\alpha + \beta + \gamma, -2\beta + 2\gamma\ )$$

obteniendo el sistema:

$\begin{cases} \alpha + \gamma = 4 \\ -\alpha + \beta + \gamma = -3 \\ -2\beta + 2\gamma = 4 \end{cases}$ cuya única solución es $\alpha = 3; \beta = -1; \gamma = 1$

Así, $\vec{u} = (3, -1, 1)$ en la base B.

Ejemplo 2

Dados los vectores $\overrightarrow{u_1} = (-2, 0, 3), \overrightarrow{u_2} = (1, -1, 0), \overrightarrow{u_3} = (0, -2, 3)\ y\ \overrightarrow{u_4} = (4, -2, -3)$ deduce cuántos vectores independientes hay y di si generan $\mathbb{R}^3$.

Solución

Calculemos el rango de la matriz de componentes de los vectores $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} 2 \neq 0$, tenemos que $rg(A) \geq 2$

Orlamos con tercera fila y tercera y cuarta columna:

Como $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$ se tiene que $rg(A) = 2$

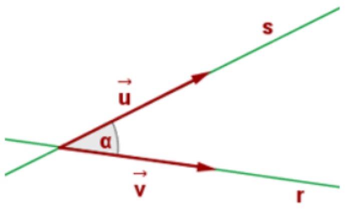
Solo hay dos vectores linealmente independientes y, por tanto, no generan $\mathbb{R}^3$

4. Producto escalar de dos vectores en el espacio *V*

Sean $\vec{u}, \vec{v}$ vectores libres del espacio.

Definimos su **producto escalar** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ como el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman:

$$\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})}$$



Nota: El ángulo de dos vectores es el menor de los ángulos que forman al hacer coincidir sus orígenes.

4.1 Consecuencias de la definición

- Si $\vec{u} = \vec{0}\ o\ \vec{v} = \vec{0}$, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- Si $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 90º$, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{u}}) = |\vec{u}|^2 \cdot \cos(0º) = |\vec{u}|^2$ y, por tanto, $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

Un vector se denomina **unitario** si su módulo es la unidad.

Una **base** se llama **ortogonal** si sus vectores son perpendiculares dos a dos.

Una **base** se llama **ortonormal** si es ortogonal y de vectores unitarios. (La base canónica)

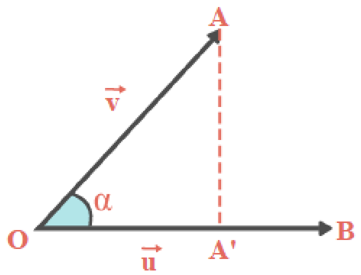
4.2 Propiedades del producto escalar

$\forall\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V,\quad \forall k \in \mathbb{R}$

1) **Conmutativa:** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2) **Asociativa mixta**: $k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v}$
3) **Distributiva respecto de la suma de vectores**: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
4) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$
5) $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

4.3 Interpretación geométrica del producto escalar



Sean $\vec{u}, \vec{v}$ dos vectores no nulos, $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ y $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$

Sea A' la proyección de A sobre la semirrecta OB.
$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}| \cdot \cos\alpha$
En el triángulo $\widetilde{OA'A}$ se tiene que $\cos\alpha = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ de donde

$$\overline{OA'} = \overline{OA} \cdot \cos\alpha = |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

Por tanto, $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\cdot\overline{OA'}$

El producto escalar de dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

4.4 Expresión analítica del producto escalar

Sea $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ una base cualquiera del espacio y $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores del mismo.
Supongamos que $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en dicha base.
$\vec{u} = u_1 \cdot \vec{e_1} + u_2 \cdot \vec{e_2} + u_3\vec{e_3}$ y $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{e_1} + v_2 \cdot \vec{e_2} + v_3\vec{e_3}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1 \cdot \vec{e_1} + u_2 \cdot \vec{e_2} + u_3\vec{e_3}) \cdot (v_1 \cdot \vec{e_1} + v_2 \cdot \vec{e_2} + v_3\vec{e_3}) =$$
$$= u_1v_1(\vec{e_1}\vec{e_1}) + u_1v_2(\vec{e_1}\vec{e_2}) + u_1v_3(\vec{e_1}\vec{e_3}) + u_2v_1(\vec{e_2}\vec{e_1}) + u_2v_2(\vec{e_2}\vec{e_2}) + u_2v_3(\vec{e_2}\vec{e_3}) +$$
$$+u_3v_1(\vec{e_3}\vec{e_1}) + u_3v_2(\vec{e_3}\vec{e_2}) + u_3v_3(\vec{e_3}\vec{e_3})$$

expresión que, en notación matricial, se puede escribir:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot \begin{pmatrix} \vec{e_1}\vec{e_1} & \vec{e_1}\vec{e_2} & \vec{e_1}\vec{e_3} \\ \vec{e_2}\vec{e_1} & \vec{e_2}\vec{e_2} & \vec{e_2}\vec{e_3} \\ \vec{e_3}\vec{e_1} & \vec{e_3}\vec{e_2} & \vec{e_3}\vec{e_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \vec{e_1}\vec{e_1} & \vec{e_1}\vec{e_2} & \vec{e_1}\vec{e_3} \\ \vec{e_2}\vec{e_1} & \vec{e_2}\vec{e_2} & \vec{e_2}\vec{e_3} \\ \vec{e_3}\vec{e_1} & \vec{e_3}\vec{e_2} & \vec{e_3}\vec{e_3} \end{pmatrix}$ es la matriz del producto escalar.

Si elegimos una base adecuada, la expresión anterior queda más reducida.

Así, si la base $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ es ortogonal, los productos $\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = 0$ para $i \neq j$ y $\vec{e_i} \cdot \vec{e_i} = |\vec{e_i}|^2$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1|\vec{e_1}|^2 + u_2v_2|\vec{e_2}|^2 + u_3v_3|\vec{e_3}|^2$$

Si la base $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ es ortonormal, $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$, con lo que

$$\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}$$

que es la **expresión del producto escalar en base ortonormal**.

La base canónica B del espacio es la formada por los vectores $B = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ siendo $\vec{\imath} = (1, 0, 0\}$, $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

La matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz del producto escalar en dicha base.
Salvo que se diga lo contrario, trabajaremos en base ortonormal porque simplifica notablemente los cálculos.

Ejemplo 3
Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u} = (2, -1, 3)\ y\ \vec{v} = (-1, 1, 5)$ expresados en una base ortonormal.
Solución

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 12$$

4.5 Ángulo de dos vectores

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vectores del espacio en base ortonormal. Vimos que

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$$

De la expresión del producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, tenemos

$$\boldsymbol{\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2} \cdot \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}}}$$

expresión que nos proporciona el valor del coseno del ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ejemplo 4
Calcula el ángulo que determinan los vectores $\vec{u} = (2, -1, 2)\ y\ \vec{v} = (0, 2, -1)$
Solución

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-2 - 2}{\sqrt{4 + 1 + 4} \cdot \sqrt{4 + 1}} = \frac{-4}{3 \cdot \sqrt{5}} \cong -0{,}5962848$$

Ahora necesitamos saber qué ángulo tiene por coseno ese valor, para lo cual utilizamos arccoseno del valor y obtenemos $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \cong 126{,}6°$

5. Producto vectorial de dos vectores en el espacio V

$$Sean\ \vec{u}, \vec{v}\ vectores\ libres\ del\ espacio\ V\ y$$
$$B = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}\ la\ base\ ortonormal\ canónica\ del\ espacio.$$

Definimos la ley de composición interna $\wedge$, denominada **producto vectorial**:

$$\wedge : VxV \longmapsto V$$
$$(\vec{u}, \vec{v}) \longrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v}$$

que asocia a cada par de vectores $(\vec{u}, \vec{v})$ de componentes $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ el vector $\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\right), \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$

El vector $\vec{u} \wedge \vec{v}$ lo podemos escribir simbólicamente mediante el determinante

$$\boldsymbol{\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{\imath} + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} \cdot \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}}$$

5.1 Interpretación geométrica del producto vectorial

Vamos a calcular el módulo del vector $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

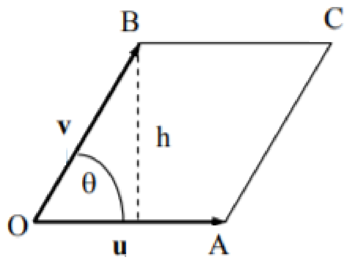
$$|\vec{u} \wedge \vec{v}|^2 = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 =$$
$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 =$$
$$= {u_2}^2 {v_3}^2 + {u_3}^2 {v_2}^2 - 2 u_2 v_3 u_3 v_2 + {u_3}^2 {v_1}^2 + {u_1}^2 {v_3}^2 - 2 u_3 v_1 u_1 v_3 + {u_1}^2 {v_2}^2 + {u_2}^2 {v_1}^2 - 2 u_1 v_2 u_2 v_1$$

Sumando y restando ${u_1}^2 {v_1}^2 + {u_2}^2 {v_2}^2 + {u_3}^2 {v_3}^2$ obtenemos

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}|^2 = ({u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2) \cdot ({v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 =$$
$$|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot cos^2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) =$$
$$|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \left(1 - cos^2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})\right) = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot sen^2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

Por tanto

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \left|sen\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\right|$$



Representamos por $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respectivamente.
Formamos el paralelogramo $OACB$ de altura h.
Se tiene que $h = |\vec{v}| \cdot \left|sen\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\right|$

Por tanto, $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot h$ que es el área del paralelogramo $OACB$, es decir, geométricamente, ***el módulo del producto vectorial de dos vectores coincide con el área del paralelogramo que tiene por lados a esos vectores***.

5.2 Propiedades del producto vectorial

Las siguientes propiedades son consecuencia de las propiedades de los determinantes.
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

1) **Anticonmutativa**: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
2) $(\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = u \wedge (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$
3) **Distributiva**: $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
4) El producto vectorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es un vector ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$

Demostración

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = u_1 \cdot \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} + u_2 \cdot \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} + u_3 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Análogamente $\vec{v} \cdot \left(\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})\right) = 0$

5) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes.

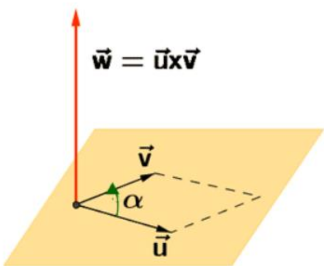
Demostración

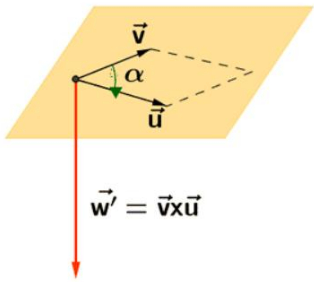
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \ , \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} = 0 \ , \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $rg \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 1$ y $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes.

Como consecuencia de lo expuesto anteriormente, el producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un vector $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ que tiene por:

- módulo: $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \left|sen\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\right|$.
- dirección: perpendicular común a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- sentido: el de avance del sacacorchos que gira de $\vec{u}$ hacia $\vec{v}$.





Ejemplo 5

Calcula el área del paralelogramo que determinan los vectores $\vec{u} = (-4, 0, 5)$ y $\vec{v} = (-4, 3, 0)$

Solución

El área del paralelogramo es el valor del módulo del producto vectorial entre los vectores dados.

Calculamos el producto vectorial de los vectores $\vec{u}=(-4,0,5)$ y $\vec{v}=(-4,3,0)$:

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -4 & 0 & 5\\ -4 & 3 & 0\end{vmatrix}=-15\vec{\imath}-20\vec{\jmath}-12\vec{k}$$

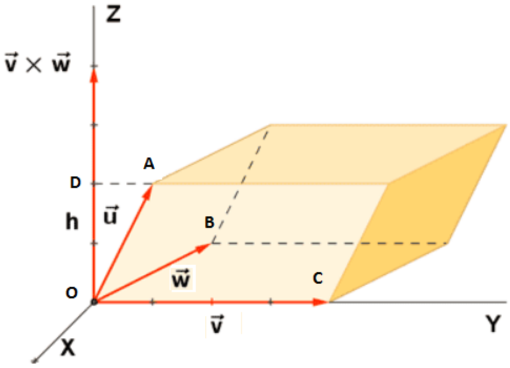
Área del paralelogramo $A=\sqrt{(-15)^2+(-20)^2+(-12)^2}=\sqrt{765}\,u^2$

6. Producto mixto

Sean $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$. Definimos producto mixto de los vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$, y lo representamos por $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$, como el producto escalar del primer vector por el vectorial de los otros dos, esto es

$$[\boldsymbol{\vec{u}},\boldsymbol{\vec{v}},\boldsymbol{\vec{w}}]=\boldsymbol{\vec{u}}\cdot(\boldsymbol{\vec{v}}\wedge\boldsymbol{\vec{w}})$$

6.1 Interpretación geométrica del producto mixto



Sean $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ representantes de los vectores $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ respectivamente.

Sea h la altura del paralelepípedo cuyas aristas, que concurren en el vértice origen O, son los tres vectores dados.

En el triángulo $\widehat{OAD}$ se tiene

$cos\left(\vec{u},\widehat{\vec{v}\wedge\vec{w}}\right)=\frac{h}{|\vec{u}|}$ de donde $h=|\vec{u}|\cdot cos\left(\vec{u},\widehat{\vec{v}\wedge\vec{w}}\right)$

$$|\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}\wedge\vec{w}|\cdot cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}\wedge\vec{w}}\right)=h\cdot|\vec{v}\wedge\vec{w}|=volumen\ del\ paralelepípedo$$

igualdad que nos dice que **el valor absoluto del producto mixto**, $|\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})|$, **es igual al volumen del paralelepípedo** cuyas aristas, que concurren en el vértice origen O, son los tres vectores dados.

6.2 Expresión analítica del producto mixto

$$Sean\ \vec{u},\vec{v}\ vectores\ libres\ del\ espacio\ V\ y\ B=\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}\ la\ base\ ortonormal\ canónica\ del\ espacio.$$

$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})=(u_1,u_2,u_3)\cdot\left(\begin{vmatrix}v_2 & v_3\\ w & w_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}v_3 & v_1\\ w_3 & w_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}v_1 & v_2\\ w_1 & w_2\end{vmatrix}\right)=$$

$$=u_1\cdot\begin{vmatrix}v_2 & v_3\\ w & w_3\end{vmatrix}+u_2\cdot\begin{vmatrix}v_3 & v_1\\ w_3 & w_1\end{vmatrix}+u_3\cdot\begin{vmatrix}v_1 & v_2\\ w_1 & w_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$$

$$[\boldsymbol{\vec{u}},\boldsymbol{\vec{v}},\boldsymbol{\vec{w}}]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_3}\\ \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \boldsymbol{v_3}\\ \boldsymbol{w_1} & \boldsymbol{w_2} & \boldsymbol{w_3}\end{vmatrix}$$

6.3 Propiedades del producto mixto

Las siguientes propiedades son consecuencia de las propiedades de los determinantes.

1) El producto mixto no varía si se permutan circularmente sus factores pero cambia de signo si éstos se trasponen.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=[\vec{v},w,\vec{u}]=[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]\quad;\quad[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=-[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]=-[\vec{u},\vec{w},\vec{v}]=-[\vec{w},\vec{v},\vec{u}]$$

2) $[\alpha\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=[\vec{u},\alpha\vec{v},\vec{w}]=[\vec{u},\vec{v},\alpha\vec{w}]=\alpha\cdot[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$

3) $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}+\vec{w'}\right]=[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]+\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w'}\right]$

4) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0\Leftrightarrow\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ son linealmente dependientes.

Ejemplo 6

Calcula el volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u} = (-3, 1, 5)$ y $\vec{v} = (4, 2, 1)$ y $\vec{w} = (1, 0, 1)$.

Solución

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_3-C_1}{\widehat{=}} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -19$$

$$V_{paralelepípedo} = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 19\, u^3$$

Ejemplo 7

Calcula el volumen del tetraedro definido por los vectores $\vec{u} = (-3, 1, 5)$ y $\vec{v} = (4, 2, 1)$ y $\vec{w} = (1, 0, 1)$.

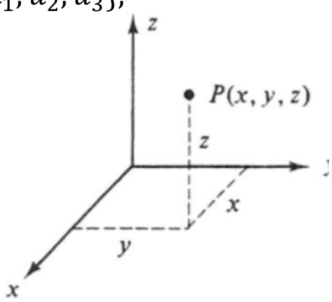
Solución

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_3-C_1}{\widehat{=}} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -19$$

$$V_{Tetraedro} = \frac{1}{6} \cdot V_{paralelepípedo} = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \frac{19}{6}\, u^3$$

7. Sistema de referencia cartesiano en el espacio

Consideremos un punto origen O en el espacio y una base $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$, Al conjunto $\mathcal{R} = \{O; B\}$ lo llamaremos sistema de referencia cartesiano del espacio.



Para cualquier punto P se tiene el vector de posición:

$$\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{u_1} + y \cdot \overrightarrow{u_2} + z \cdot \overrightarrow{u_3}$$

Llamaremos coordenadas del punto P en la referencia $\mathcal{R}$ a las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ en la base B y lo escribiremos $P(x, y, z)$.

Un vector $\overrightarrow{PQ}$ con origen en el punto $P(x, y, z)$ y extremo en el punto $Q(x', y'z')$ tendrá de componentes $\overrightarrow{PQ}(x' - x, y' - y, z' - z)$ al ser $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$, de donde $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$.

Ejemplo 8

Dados los puntos del espacio $P(2, -1, 3), Q(-1, 1, 5) y\ R(0, 2, -3)$ determina las componentes de los vectores $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{RP}$.

Solución

$$\overrightarrow{PQ} = (-3, 2, 2)\ ;\ \ \overrightarrow{QR} = (1, 1, -8)\ ;\ \ \overrightarrow{RP} = (2, -3, 6)$$

En el siguiente tema nos ocuparemos de la geometría afín, el espacio afín asociado a un espacio vectorial. En él se consideran los puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ y los vectores del espacio vectorial V.

A cada punto A y a cada vector $\vec{v}$ se le hace corresponder un único punto A' tal que $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$.

Se determinan las ecuaciones de la recta y del plano en el espacio así como las posiciones relativas.