1º) Dada la función $f(x) = \frac{10x}{x^2+2}$ se pide:

a) Su dominio, simetría, monotonía, extremos y asíntotas.

b) Esboza su gráfica.

c) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = 1$.

Resolución

a) $Dom\ (f) = \mathbb{R}$ porque se trata de una función racional en la que el denominador no tiene raíces reales.

$$f(-x) = \frac{-10x}{x^2+2} = -\frac{10x}{x^2+2} = -f(x) \quad \textit{función con simetría impar}$$

$$f'(x) = \frac{10(x^2+2) - 10x \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{20-10x^2}{(x^2+2)^2} \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$$

Ceros: $20 - 10x^2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$ Polos: $(x^2+2)^2 = 0$ *No tiene*

La recta real queda dividida en tres intervalos, $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, +\infty)$

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, +\infty)$
Signo de $f'(x) = \frac{20-10x^2}{(x^2+2)^2}$	$-$	$+$	$-$

Decrece: $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$; Crece: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Extremos relativos: Mínimo en $P\left(-\sqrt{2}, \frac{-5\sqrt{2}}{2}\right)$ y Máximo en $Q\left(\sqrt{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

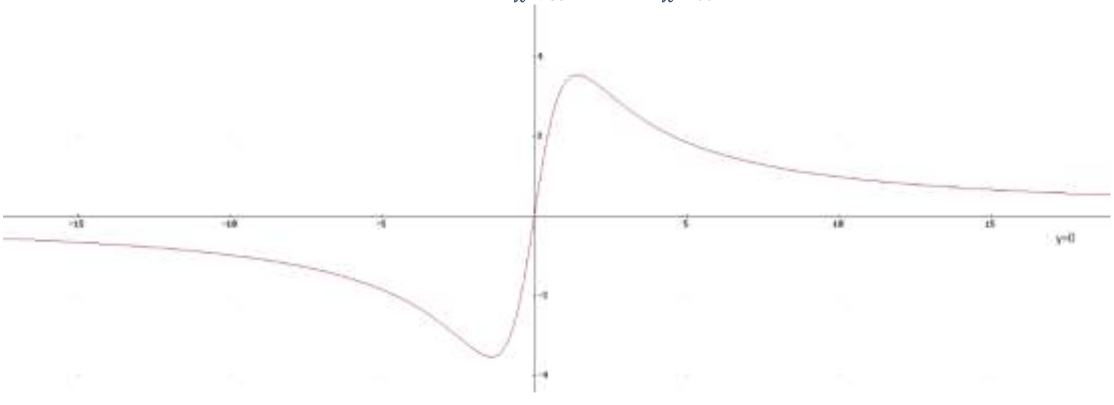
Asíntotas:

Verticales: No tiene porque $\lim_{x \to a} \frac{10x}{x^2+2} = \frac{10a}{a^2+2} \neq \pm\infty$;

Horizontales: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{10x}{x^2+2} = 0$ La recta $y = 0$ es asíntota horizontal

Oblicua $y = mx + n$: No tiene porque $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{10x}{x^3+2x} = 0$

b)



c) $f(1) = \frac{10}{3}$; $f'(1) = \frac{10}{9}$

La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P\left(1, \frac{10}{3}\right)$ es:

$$t \equiv y - \frac{10}{3} = \frac{10}{9} \cdot (x-1) \Longleftrightarrow t \equiv y = \frac{10}{9}x + \frac{20}{9}$$

2º) Demuestra que la ecuación $2x^3 + 2x = 3$, tiene exactamente una raíz real.

Resolución

Sea $f(x)=2x^3+2x-3$, función continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [0,1] \\ f(0)=-3<0 \\ f(1)=1>0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_1\in(0,1)\ tal\ que\ f(c_1)=0 \Leftrightarrow 2{c_1}^3+2c_1-3=0$$

Así, c_1 es raíz de la ecuación $2x^3+2x=3$. Veamos que no tiene más.

Supongamos que c_2 fuese otra raíz de la ecuación; así $2{c_2}^3+2c_2-3=0\ \ y$ $f(c_2)=0$

Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo (c_1,c_2) se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ \ [c_1,c_2] \\ f(x)\ derivable\ en\ (c_1,c_2) \\ f(c_1)=f(c_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_1\in(c_1,c_2)\ tal\ que\ f'(x_1)=0$$

es decir, encontramos un punto x_1 de derivada nula.

Sin embargo, $f'(x)=6x^2+2$ y $6x^2+2\ =0$ no tiene solución real; esto contradice la existencia de un valor x_1 con derivada nula. La contradicción viene de suponer la existencia de una segunda raíz c_2. Por tanto, la ecuación tiene exactamente una raíz c_1.

3º) Calcula $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{lnx}}$

Resolución

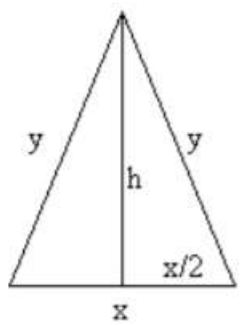
$$ln\left(\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{lnx}}\right)=\lim_{x\to0^+}ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{lnx}}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{ln\left(\frac{1}{x}\right)}{lnx}\right)^{\frac{\infty}{\infty}}\overset{L`Hôp}{\cong}\lim_{x\to0^+}\frac{x\,\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=-1$$

$$\text{Así, } ln\left(\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{lnx}}\right)=-1, \text{ de donde } \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{lnx}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

4º) Calcula la base y la altura de un triángulo isósceles de perímtro 8 cm y área máxima

Resolución

Sean x e y las longitudes, en cm, de los lados del triángulo isósceles.



Perímetro 8 cm$\Longrightarrow x+2y=8$

Área $A(x,y)=\frac{1}{2}x\cdot h$

Por otro lado, $h^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=y^2$, de donde $h=\sqrt{y^2-\frac{x^2}{4}}$

Así, $A(x,y)=\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{y^2-\frac{x^2}{4}}$

Planteamiento del problema:

$$\left[\begin{array}{ll} maximizar\ \ A(x,y)=\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{y^2-\frac{x^2}{4}} & función\ objetivo \\ s.a\qquad x+2y=8 & restricción \end{array}\right.$$

Despejando de la restricción: $y=\frac{8-x}{2}$

Sustituyendo en la función área, tenemos:

$$A(x)=\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{\left(\frac{8-x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{16-4x}\text{ maximizar}$$

Derivando, $A'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{16-4x}+\frac{-4x}{2\sqrt{16-4x}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{32-12x}{2\sqrt{16-4x}}\right)$

Buscamos posible mínimo: $A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{32-12x}{2\sqrt{16-4x}} = 0 \Leftrightarrow 32 - 12x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}\ cm$

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de $A(x)$:

Para $0 < x < \frac{8}{3}$, $A'(x) > 0$ y $A(x)$ crece. Para $x > \frac{8}{3}$, $A'(x) < 0$ y $A(x)$ decrece. Así, el valor $\frac{8}{3}$ es un máximo de la función área.

El valor del otro lado es $y = \frac{8-\frac{8}{3}}{2} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}\ cm$

La altura es $h = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - \frac{\left(\frac{8}{3}\right)^2}{4}} = \sqrt{\frac{64}{9} - \frac{64}{36}} = \sqrt{\frac{192}{36}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm

La base es $x = \frac{8}{3}$ cm y la altura $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm

5º) Calcula la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+Lx}}$ que pasa por el punto $P(1,0)$.

Resolución

La primitiva que buscamos estará en su integral indefinida:

$$F(x) = \int \frac{1}{x\sqrt{1+Lx}}\, dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+Lx}}\, dx = 2\sqrt{1+Lx} + c$$

$$F(1) = 0 \Leftrightarrow 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -2$$

La primitiva es $F(x) = 2\left(\sqrt{1+Lx} - 1\right)$

6º) Calcula las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 (x+1)\cdot e^{-x}\, dx$ **b)** $\int \frac{x-1}{(x+2)^2}\, dx$

Resolución

a)

$$\int (x+1)\cdot e^{-x}\, dx \quad \begin{matrix} u = x+1 \\ dv = e^{-x}\, dx \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} du = dx \\ v = \int dv = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x} \end{matrix}$$

Así, aplicando la fórmula de integración por partes, obtenemos la integral

$$\int (x+1)\cdot e^{-x}\, dx = -(x+1)e^{-x} + \int e^{-x} = -(x+1)e^{-x} - e^{-x} + c = -e^{-x}(x+2) + c$$

$$\int_0^1 (x+1)\cdot e^{-x}\, dx = [-e^{-x}(x+2)]_0^1 = -3e^{-1} + 2 = 2 - \frac{3}{e}$$

$b)\ \int \frac{x-1}{(x+2)^2}\, dx$

Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{x-1}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2}$$

$$x - 1 = A(x+2) + B$$

Sustituyendo $x = -2$ y $x = 0$ obtenemos $\begin{cases} -3 = B \\ -1 = 2A + B \end{cases}$ de donde $A = 1$ y $B = -3$

Así,

$$\int \frac{x-1}{(x+2)^2}\,dx = \int \frac{1}{x+2}\,dx - 3\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = L|x+2| + \frac{3}{x+2} + c$$

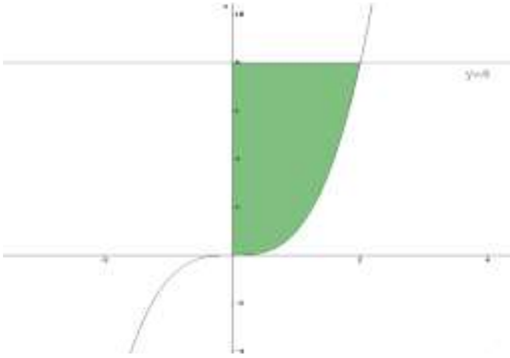
7º) Dibuja el recinto comprendido entre las gráficas de las funciones

$y = x^3$, $y = 8$ y el eje de ordenadas OY

y calcula su área.

Resolución

Cortes entre ambas funciones $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$



Área$=\int_0^2 (8 - x^3)dx = \left[8x - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 16 - 4 = 12u^2$

Puntuación

1 -------------- 2,25 puntos

2, 5, 7 ------- 1 "

3 -------------- 0,75 "

4 -------------- 2 "

6 -------------- 2 "