1º) Calcula una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=\frac{2x}{x+3}$ tal que $F(-2)=0$.

Resolución

La primitiva que buscamos estará en su integral indefinida:

$$F(x)=\int\frac{2x}{x+3}\,dx=2\cdot\int\frac{x+3-3}{x+3}\,dx=2\cdot\left[\int dx-\int\frac{3}{x+3}\right]=2x-6L|x+3|+c$$

$$F(-2)=0\Leftrightarrow -4+c=0\Leftrightarrow c=4$$

La primitiva es $F(x)=2x-6L|x+3|+4$

2º) Demuestra que $\displaystyle\int_0^{e-1}\frac{1}{x+1}\,dx+\int_0^{\pi}\cos x\cdot e^{\operatorname{sen} x}\,dx=1$

Resolución

$$\int_0^{e-1}\frac{1}{x+1}\,dx+\int_0^{\pi}\cos x\cdot e^{\operatorname{sen} x}\,dx=[\ln(x+1)]_0^{e-1}+[e^{\operatorname{sen} x}]_0^{\pi}=(1-0)+(1-1)=\boxed{1}$$

3º) Calcula las siguientes integrales:

Resolución

a) $\displaystyle\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^2\,dx=\int\left(x+2\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\,dx=\int x\,dx+2\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\int x^{-2}\,dx=$

$$=\frac{x^2}{2}+2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{x^{-1}}{-1}+c=\frac{x^2}{2}+4\sqrt{x}-\frac{1}{x}+c$$

b) $\displaystyle\int_2^5\frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\frac{3}{2}\int_2^5\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=3\left[\sqrt{1+x^2}\right]_2^5=3(\sqrt{26}-\sqrt{5})$

c) $\displaystyle\int\frac{2x-1}{x^2\cdot(x+2)}\,dx$

Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{2x-1}{x^2\cdot(x+2)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+2}=\frac{A\cdot(x+2)+B\cdot x\cdot(x+2)+C\cdot x^2}{x^2\cdot(x+2)}$$

$$2x-1=A\cdot(x+2)+B\cdot x\cdot(x+2)+C\cdot x^2$$

Sustituyendo $x=0$; $x=-2$ y $x=1$ obtenemos $\begin{cases}-1=2A\\-5=4C\\1=3A+3B+C\end{cases}$ de donde

$$A=-\frac{1}{2}\ ;\ B=\frac{5}{4};\ C=-\frac{5}{4}$$

Por tanto:

$$\int\frac{2x-1}{x^2\cdot(x+2)}\,dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2}\,dx+\frac{5}{4}\int\frac{1}{x}\,dx-\frac{5}{4}\int\frac{1}{x+2}\,dx=\frac{1}{2x}+\frac{5}{4}L|x|-\frac{5}{4}L|x+2|+c$$

d) $\displaystyle\int\frac{senx}{1-sen^2x}\,dx=\int\frac{senx}{cos^2x}\,dx=\int(cosx)^{-2}\cdot senx\,dx=-\frac{(cosx)^{-1}}{-1}+c=\frac{1}{cosx}+c$

e) $\displaystyle\int x\cdot L(1+x^2)dx=\frac{x^2}{2}L(1+x^2)-\int\frac{x^3}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}L(1+x^2)-I_1\overset{[1]}{=}$

$$u = L(1+x^2) \qquad du = \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$
$$dv = x\,dx \quad \Longrightarrow \quad v = \int dv = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$I_1 = \int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx \overset{\substack{Racional:\ División\\ de\ polinomios}}{\cong} \int x\,dx - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}L|1+x^2| + c_1$$

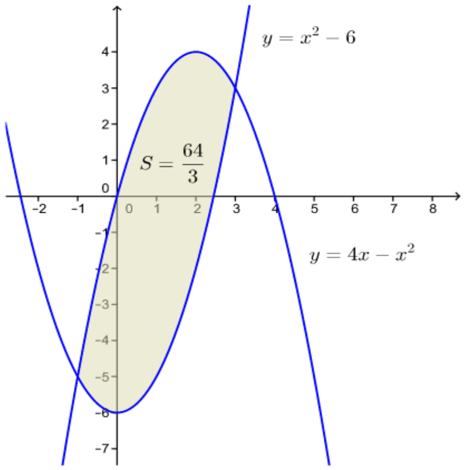
$$\overset{[1]}{\cong} \frac{x^2}{2}L(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}L|1+x^2| + c = \frac{x^2+1}{2}L(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + c$$

4º) Dibuja el recinto limitado por las gráficas de las siguientes funciones

$$y = 4x - x^2 \ ; \ y = x^2 - 6$$

y calcula su área.

Resolución



$y = 4x - x^2 \ ; \ y = x^2 - 6$

Puntos de corte entre las curvas:

$x^2 - 6 = 4x - x^2$

$2x^2 - 4x - 6 = 0 \ ; \ x^2 - 2x - 3 = 0 \ ; \ (x+1)(x-3) = 0$

Las curvas se cortan en $x = -1$ y en $x = 3$.

$$S = \int_{-1}^{3} \left((4x - x^2) - (x^2 - 6)\right) = \int_{-1}^{3} \left(-2x^2 + 4x + 6\right) =$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x\right]_{-1}^{3} = \boxed{\frac{64}{3}} \text{ u2}$$

Puntuación

1, 2, -------------- 1,25 puntos
3 ------------------ 5 "
4 ------------------ 2,5 "