1º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1-cosx}{(e^x-1)^2} & si\ x \neq 0 \\ k & si\ x = 0 \end{cases}$ **halla el valor de k para que la función sea continua en $\mathbb{R}$.**

Resolución

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ x \neq 0,\ \ f(x) = \frac{1-cosx}{(e^x-1)^2}$ continua por ser cociente de continuas y $(e^x-1)^2 \neq 0$.

$x = 0$ Exigimos que se cumplan las condiciones de continuidad en el punto $x = 0$:

$Existencia\ de\ f(0) = k$

$Existencia\ de\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{(e^x-1)^2} \underset{\text{L'Hôpital}}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2(e^x-1)e^x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{e^x e^x + (e^x-1)e^x} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{e^x(2e^x-1)} \underset{\text{indeterminación desaparecida}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1(2-1)} = \frac{1}{2} \text{ y, por tanto, } \boxed{k = \frac{1}{2}}$$

2º) Dada la función $f(x) = \frac{x-a}{(x-b)^2}$ **donde a y b son números reales positivos, se pide determinar los valores de a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto $P\left(0, -\frac{1}{4}\right)$. Estudia si ese extremo es mínimo o máximo.**

Resolución

$f(x) = \frac{x-a}{(x-b)^2}$; $a,\ b > 0$

extremo relativo en $(0, -1/4) \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -1/4 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$

$f(0) = \frac{-a}{b^2} = -\frac{1}{4}$; $\boxed{a = b^2/4}$

$f'(x) = \frac{(x-b)^2-(x-a)2(x-b)}{(x-b)^4} = \frac{x-b-2x+2a}{(x-b)^3} = \frac{-x-b+2a}{(x-b)^3}$

$f'(0) = 0 \Rightarrow \boxed{-b+2a = 0}$

sustituyendo el valor de a : $-b + 2\frac{b^2}{4} = 0$; $b^2 - 2b = 0$; $b(b-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ no vale } (b > 0) \\ \boxed{b = 2;\ a = 1} \end{cases}$

$f'(x) = \frac{-x-b+2a}{(x-b)^3} = \frac{-x}{(x-2)^3}$; $f''(x) = \frac{2x+2}{(x-2)^4}$; $f''(0) = \frac{2}{16} > 0 \Rightarrow \boxed{\text{en } x = 0 \text{ hay un mínimo}}$

3º) Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \frac{x}{x^2-4} + \frac{L(x+1)}{x+1}$ **en** $x = 0$.

Resolución

$$f'(x) = \frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2} + \frac{1-L(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$f(0) = 0\ ;\ f'(0) = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

$$t \equiv y = \frac{3}{4}x$$

4º) Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$

b) $\lim_{x\to +\infty}(x^2+4)^{\frac{1}{Lx}}$

Resolución

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)\overset{\infty-\infty}{\triangleq}\lim_{x\to 0}\frac{x-e^x+1}{x\cdot(e^x-1)}\overset{\frac{0}{0}L'H\hat{o}p}{\triangleq}\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{e^x-1+xe^x}\overset{\frac{0}{0}L'H\hat{o}p}{\triangleq}\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{e^x+e^x+xe^x}=-\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to +\infty}(x^2+4)^{\frac{1}{Lx}}\overset{+\infty^0}{\triangleq}$

$$L\left(\lim_{x\to +\infty}(x^2+4)^{\frac{1}{Lx}}\right)=\lim_{x\to +\infty}L\left((x^2+4)^{\frac{1}{Lx}}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{Lx}\cdot L(x^2+4)\right)\overset{0.\infty}{\triangleq}\lim_{x\to +\infty}\frac{L(x^2+4)}{Lx}\overset{\frac{+\infty}{+\infty},L`H\hat{o}p}{\triangleq}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2}{x^2+4}=2$$

Así, $L\left(\lim_{x\to +\infty}(x^2+4)^{\frac{1}{Lx}}\right)=2$, de donde $\lim_{x\to +\infty}(x^2+4)^{\frac{1}{Lx}}=e^2$

5º) Calcula un punto del intervalo $(1,3)$ en el que la tangente a la curva $y=x^3-x^2+2$ sea paralela a la recta determinada por los puntos $P(1,2)$ y $Q(3,20)$. ¿Qué teorema garantiza la existencia de dicho punto?

Resolución

$y=x^3-x^2+2$; $P=(1,2)$, $Q=(3,20)$

P y Q son puntos de la curva, pues $\begin{cases} y(1)=1^3-1^2+2=2 \\ y(3)=3^3-3^2+2=20 \end{cases}$

La función es de tipo polinómico, por lo que es siempre continua y derivable, satisfaciendo, así, las condiciones del teorema del Valor Medio en el intervalo $[1,3]$. Existe al menos un $c\in(1,3)$ tal que $f'(c)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}$.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{20-2}{2}=9 \\ f'(x)=3x^2-2x\ ;\ f'(c)=3c^2-2c \end{array}\right\} 3c^2-2c=9$$

$3c^2-2c-9=0$; $c=\frac{2\pm\sqrt{4+108}}{6}=\frac{2\pm4\sqrt{7}}{6}=\boxed{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{7}\approx 2{,}0972}$

[La otra solución queda fuera del intervalo considerado]

Como ya se ha indicado, el teorema que garantiza la existencia del punto es el $\boxed{\text{Teorema del Valor Medio}}$

6º) Halla las dimensiones del triángulo rectángulo de mayor área que se puede construir, si la suma de las longitudes de uno de los catetos y la hipotenusa es 10 m.

Resolución

x: *longitud de un cateto* (m) ; $10-x$: *longitud de la hipotenusa* (m) ;

El cateto restante y cumple $x^2+y^2=(10-x)^2$; de donde $y=\sqrt{(10-x)^2-x^2}=\sqrt{100-20x}$

$$maximizar\ el\ área\ \ S(x,y)=\frac{1}{2}x\cdot y$$

Área: $S(x) = \frac{x\sqrt{100-20x}}{2}$

$S'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{100-20x} + x\frac{-20}{2\sqrt{100-20x}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{100-20x} - x\frac{10}{\sqrt{100-20x}}\right)$

$S'(x) = \frac{1}{2}\frac{100-20x-10x}{\sqrt{100-20x}} = \frac{50-15x}{\sqrt{100-20x}}$

$S'(x) = 0\ ;\ 50 - 15x = 0\ ;\ \boxed{x = \frac{10}{3}\ \mathrm{m}}$

$\text{hipotenusa} = 10 - \frac{10}{3} = \boxed{\frac{20}{3}\ \mathrm{m}}$

$\text{longitud del segundo cateto} = \sqrt{100 - 20\frac{10}{3}} = \sqrt{\frac{100}{3}} = \boxed{\frac{10\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{m}}$

Falta comprobar que $S''\left(\frac{10}{3}\right) < 0$

7º) Demuestra que la ecuación $x^3 - x^2 + 5x - 3 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

Resolución

Sea $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 3$, función continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [0,1] \\ f(0) = -3 < 0 \\ f(1) = 2 > 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow}\quad \exists c_1 \in (0,1)\ tal\ que\ f(c_1) = 0 \Leftrightarrow {c_1}^3 - {c_1}^2 + 5c_1 - 3 = 0$$

Así, c_1 es raíz de la ecuación $x^3 - x^2 + 5x - 3 = 0$. Veamos que no tiene más.
Supongamos que c_2 fuese otra raíz de la ecuación; así ${c_2}^3 - {c_2}^2 + 5c_2 - 3 = 0\ \ y$
$f(c_2) = 0$
Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo (c_1, c_2) se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ \ [c_1, c_2] \\ f(x)\ derivable\ en\ (c_1, c_2) \\ f(c_1) = f(c_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_1 \in (c_1, c_2)\ tal\ que\ f'(x_1) = 0$$

es decir, encontramos un punto x_1 de derivada nula.
Sin embargo, $f'(x) = 3x^2 - 2x + 5$ y $3x^2 - 2x + 5 = 0$ no tiene solución real; esto contradice la existencia de un valor x_1 con derivada nula. La contradicción viene de suponer la existencia de una segunda raíz c_2. Por tanto, la ecuación tiene exactamente una raíz c_1.

8º) Estudia el dominio, corte con los ejes, monotonía, curvatura y asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2-5}{2x-4}$. Esboza su gráfica.

Resolución

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ porque $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Cortes con los ejes coordenados

$$f(x) = \frac{x^2-5}{2x-4}\left\{\begin{array}{l} x = 0 \Longrightarrow y = \frac{5}{4};\quad P\left(0, \frac{5}{4}\right) \\ y = 0 \Longrightarrow \frac{x^2-5}{2x-4} \Longrightarrow x^2 - 5 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{5};\ \ Q(-\sqrt{5}, 0)\ y\ R(\sqrt{5}, 0) \end{array}\right.$$

Monotonía: $f'(x) = \frac{2x\cdot(2x-4)-(x^2-5)\cdot 2}{(2x-4)^2} = \frac{2x^2-8x+10}{(2x-4)^2} > 0$ en el dominio. Creciente.

Curvatura: $f''(x) = \frac{(4x-8)\cdot(2x-4)^2-(2x^2-8x+10)\cdot 2\cdot 2(2x-4)}{(2x-4)^4} = \frac{(4x-8)\cdot(2x-4)-4\cdot(2x^2-8x+10)}{(2x-4)^3} = \frac{-40}{(2x-4)^3}$

$$f''(x) = \frac{-40}{(2x-4)^3} \begin{cases} > 0 \Leftrightarrow 2x-4 < 0 \Leftrightarrow x < 2.\, (-\infty, 2)\ Cóncava \\ < 0 \Leftrightarrow 2x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 2.\, (2, +\infty)\ Convexa \end{cases}$$

Asíntotas verticales:

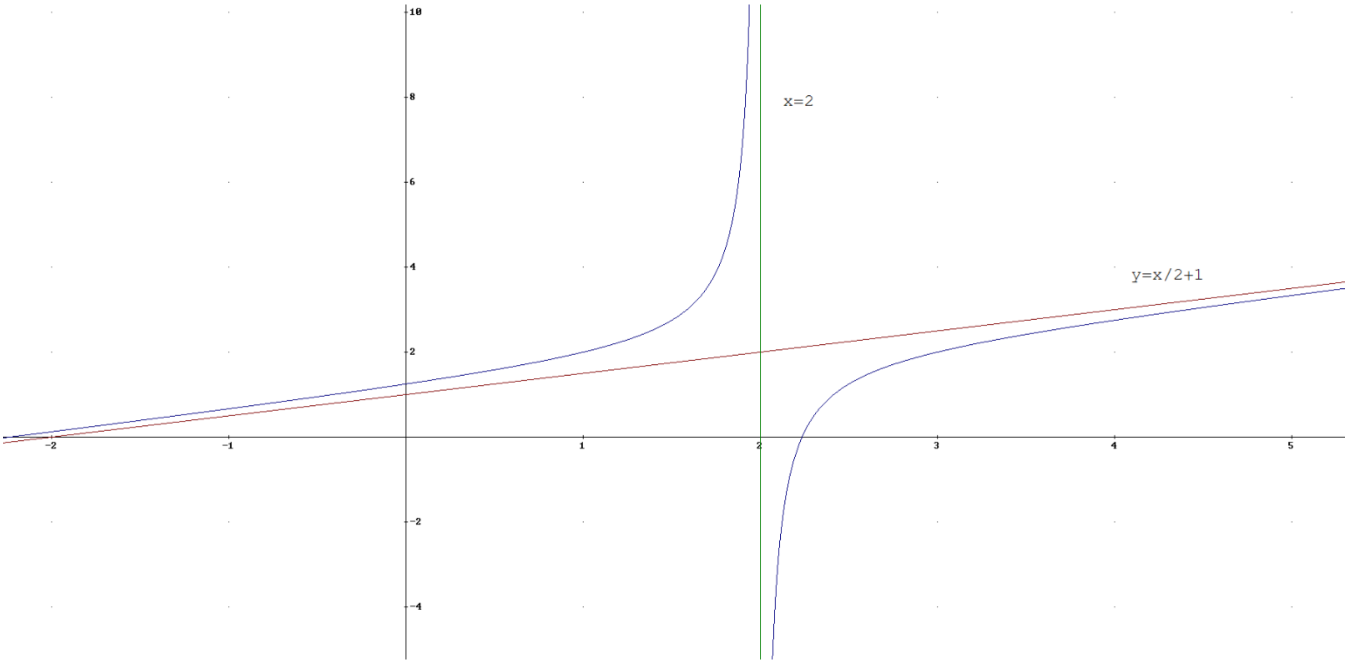
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5}{2x-4} \overset{\frac{-1}{0}}{=} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2-5}{2x-4} \overset{\frac{-1}{0^-}}{=} +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2-5}{2x-4} \overset{\frac{-1}{0^+}}{=} -\infty \end{cases}$$ la recta $x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal no tiene porque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-5}{2x-4} = \pm\infty$

Asíntota oblicua: $y = mx + n$

$m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2-5}{2x-4}}{x} = \frac{1}{2}$; $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-5}{2x-4} - \frac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x-10}{4x-8} = 1$

$y = \frac{x}{2} + 1$ es asíntota oblicua



Puntuación

1, 2, 3, 4 ------ 1 punto

5, 6, 7, 8 ------ 1’5 “