1º) La producción de cierta hortaliza en un invernadero (Q(x) en Kg) depende de la temperatura x (ºC) según la expresión $Q(x) = (x+1)^2(32-x)$.
a) Calcula razonadamente cuál es la temperatura óptima a mantener en el invernadero.
b) ¿Qué producción de hortaliza se obtendría?

Resolución

a) La temperatura óptima será la que haga máxima la producción. Buscamos ese máximo:

$$Q'(x) = 2(x+1)(32-x) - (x+1)^2 = (x+1)(63-3x)$$

$$Q'(x) = 0 \Leftrightarrow= (x+1)(63-3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 21 \end{cases} \text{ posibles extremos}$$

$$Q''(x) = -6(x-10)\begin{cases} Q''(-1) > 0 \\ Q''(21) < 0 \; \textit{Máximo relativo en } x = 21℃ \;\; \textit{temperatura óptima} \end{cases}$$

b) Producción máxima: $Q(21) = 5324\ Kg$

2º) Una empresa de telefonía quiere lanzar al mercado una oferta de tarifa plana de internet. Se ha realizado un estudio que determina que si la tarifa fuera de 36 € podrían conseguirse 4800 contratos. Sin embargo, por cada euro menos en la tarifa, el número de contratos previsto anteriormente se incrementaría en 150. Se pide:
a) Expresar el ingreso total previsto en función del descuento x.
b) ¿Cuál debería ser la tarifa para que la empresa obtuviera el ingreso máximo? ¿Cuál es éste y con cuántos abonados se conseguiría? Justificar que el ingreso realmente obtenido es máximo.

Resolución

Sea x el descuento óptimo, aquel que maximiza los ingresos.

a) La función ingreso es $I(x) = (36-x)\cdot(4800+150x)$

b) Buscamos su máximo: $I'(x) = -4800 - 150x + 150(36-x) = 600 - 300x$

$$I'(x) = 0 \Leftrightarrow 600 - 300x = 0 \Leftrightarrow x = 2 \;\; ; \;\; I''(x) = -300 \;\; ; \;\; I''(2) = -300 < 0 \;\; \textit{Máximo}$$

La tarifa debería ser de $36 - 2 = 34$ €, el ingreso máximo $I(34) = 173400$ € y se consigue con 5100 clientes.

3º) El coste de fabricación en euros de x unidades de un artículo viene dado por la función $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 20$.
a) ¿Cuál es la función que determina el precio unitario?
b) ¿Para qué producción resulta mínimo el coste unitario? ¿Cuánto vale éste? Justifica que es un mínimo

Resolución

a) $P(x) = \frac{x-2\sqrt{x}+20}{x}$ precio por unidad

b) Buscamos el mínimo coste unitario:

$$P'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)x - x + 2\sqrt{x} - 20}{x^2}$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)x - x + 2\sqrt{x} - 20 = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} = 20 \Leftrightarrow x^2 - 400x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 400 \end{cases}$$

Se comprueba que $P''(400) > 0$ y $x = 400$ es mínimo.
Mínimo en 400 unidades y coste mínimo de $P(400) = 19/20 = 0{,}95$ *euros*.

4º) El precio de coste de una unidad de un cierto producto es de 120 €. Si se vende a 150 € la unidad, lo compran 500 clientes. Por cada 10 € de aumento en el precio de venta, las ventas disminuyen en 20 clientes.
a) Halla una fórmula que describa el beneficio.
b) Calcula a qué precio p por unidad hemos de vender el producto para obtener un beneficio máximo.

c) En el caso anterior, encuentra el número de unidades que se venden y calcula el beneficio máximo.

Resolución

a) $p =$ precio de venta ;

$B(p) = p \cdot nºunidades - 120 \cdot nºunidades = (p-120)\cdot\left(500 - 20\cdot\left(\frac{p-150}{10}\right)\right)$

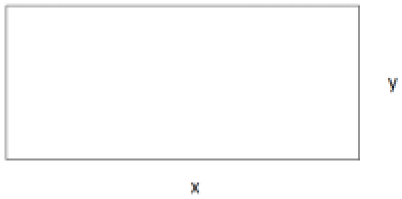
$B(p) = (p-120)\cdot(500 - 2\cdot(p-150)) = (p-120)\cdot(-2p+800) = -2p^2 + 040p - 96000$

b) Máximo: $p =\ 260$ €

c) Se venden 280 unidades y el beneficio es de 39200 €

5º) Disponemos de 200 m de tela metálica. Halla las dimensiones del campo rectangular de mayor área posible que se puede cercar con dicha tela.

Resolución



Sean x e y las dimensiones de la parcela rectangular.

Planteamiento del problema:

$$\left[\begin{array}{lll} maximizar & A(x,y) = x\cdot y & función\ objetivo \\ s.a & x + y = 100 & restricción \end{array}\right.$$

Despejando de la restricción tenemos: $y = 100 - x$ [1] y sustituyendo en la función objetivo:

$A(x) = x\cdot(100-x) = 100x - x^2$ que es la función área dependiente de una sola variable.

Buscamos el máximo de la función $A(x)$:

$$A'^{(x)} = 100 - 2x\ ;\ A'(x) = 0 \iff 100 - 2x = 0 \iff x = 50\,m \ \text{ e } \ \underbrace{y = 50\,m}_{[1]}$$

Comprobamos que, efectivamente, el valor $x = 50$ es máximo de la función área $A(x)$:

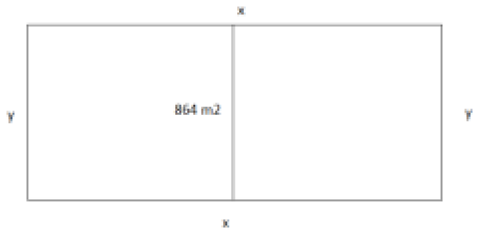
$$A''(x) = -2\ ;\ A''(50) = -2 < 0\ \text{ Máximo en } x = 50$$

Las dimensiones del campo rectangular de área máxima que se puede cercar con 200 *metros* de tela metálica es un cuadrado de **50 m** de lado.

6º) Queremos construir dos placas cuadradas con dos materiales distintos cada una de ellas a razón de 2 y 3 euros el cm^2 respectivamente. Si queremos que el perímetro total de las placas sea de 1 m, halla sus dimensiones para que el coste sea mínimo. [**Solución**: 15 cm y 10 cm respectivamente]]

7º) En un campo se quiere limitar una parcela de 864 m^2 por medio de una valla rectangular y además dividirla en dos partes iguales por medio de otra valla paralela a uno de los lados. Determina las dimensiones de la parcela para que la longitud total de la valla empleada sea mínima.

Resolución



Sean x e y las dimensiones de la parcela rectangular.

Planteamiento:

$$\left[\begin{array}{lll} minimizar & P(x,y) = 2x + 3y & función\ objetivo \\ s.a & x\cdot y = 864 & restricción \end{array}\right.$$

Despejando de la restricción tenemos: $y = \frac{864}{x}$ [1] y, sustituyendo en la función objetivo,:

$P(x) = 2x + \frac{2592}{x}$ que es la función perímetro dependiente de una sola variable

Buscamos el máximo de la función $P(x)$:

$$P'(x) = 2 - \frac{2592}{x^2}\ ;\ P'(x) = 0 \iff 2 = \frac{2592}{x^2} \iff x = \sqrt{1296} = 36\text{ m} \ \text{ e } \ \underbrace{y = 24}_{[1]}\text{ m}$$

Comprobamos que, efectivamente, el valor $x = 36$ es mínimo de la función perímetro $P(x)$:

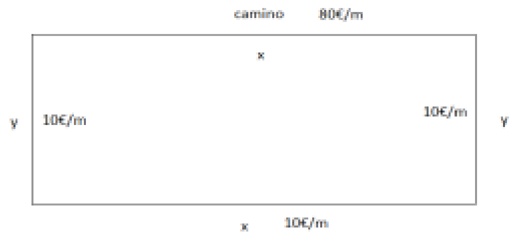
$P''(x) = \frac{5184}{x^3}\ ;\ P''(36) > 0$ Mínimo en $x = 36$

Las dimensiones de la parcela rectangular de 864 m^2 de área que minimizan la longitud total de valla empleada son 36 metros por 24 metros.

8º) Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 80€/m y la de los otros lados 10€/m, halla el área del mayor campo rectangular que puede cercarse con 28800 €.

Resolución

Sea x la longitud del lado de la valla que está junto al camino e y la longitud del lado perpendicular.



Planteamiento:

$$\left[\begin{array}{ll} maximizar\ \ A(x,y) = x\cdot y & función\ objetivo \\ \quad s.a\ \ 90x + 20y = 28800 & \quad restricción \end{array}\right.$$

Despejando de la restricción tenemos: $y = \frac{2880-9x}{2}$ [1] y sustituyendo en la función objetivo:

$A(x) = x\cdot\frac{2880-9x}{2} = \frac{1}{2}\cdot(2880x - 9x^2)$ que es la función área dependiente de una sola variable.

Buscamos el máximo de la función $A(x)$:

$A'(x) = \frac{1}{2}\cdot(2880 - 18x)$; $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2880 - 18x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2880}{18} = 160$ m e $\underbrace{y = 720}_{[1]}$ m

Comprobamos que, efectivamente, el valor $x = 160$ es máximo de la función área $A(x)$:

$A''(x) = \frac{1}{2}\cdot(-18) = -9$; $A''(160) = -9 < 0$ Máximo en $x = 160$

El área del mayor campo rectangular que puede cercarse con 28800€ es A =160·720=115200 m^2, y sus dimensiones son 160 m por 720 m.

9º) Un alambre de longitud 3 m de divide en dos partes. Con la primera se construye un cuadrado y con la segunda una circunferencia. Determina cómo debe dividirse el alambre para que la suma de las áreas de las figuras que se forman sea mínima.

Resolución

Sea x la longitud de uno de los trozos e y la del otro.

El lado del cuadrado construido con x metros de alambre es $\frac{x}{4}$ y su área $A_1(x) = \frac{1}{16}x^2$

La longitud de la circunferencia de radio r construida con y metros de alambre es $2\pi r = y$.

Despejando de esta última igualdad, obtenemos el radio del círculo $r = \frac{y}{2\pi}$ en función de y; su área será, por tanto $A_2(y) = \pi r^2 = \pi\left(\frac{y}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{4\pi}y^2$

La suma de las áreas de las figuras construidas es $A(x,y) = A_1(x) + A_2(y) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4\pi}y^2$

Planteamiento del problema: $\left[\begin{array}{ll} minimizar\ \ A(x,y) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4\pi}y^2 & función\ objetivo \\ \quad s.a \qquad x + y = 3 & restricción \end{array}\right.$

Despejando de la restricción tenemos: $y = 3 - x$ [1] y sustituyendo en la función objetivo:

$A(x) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4\pi}(3-x)^2$ que es la función área dependiente de una sola variable.

Buscamos el mínimo de la función $A(x)$:

$A'(x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{2\pi}(3-x)$; $A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x = \frac{1}{2\pi}(3-x) \Leftrightarrow x = \frac{12}{\pi+4}m$

Comprobamos que, efectivamente, el valor $x = \frac{12}{\pi+4}$ es mínimo de la función área $A(x)$:

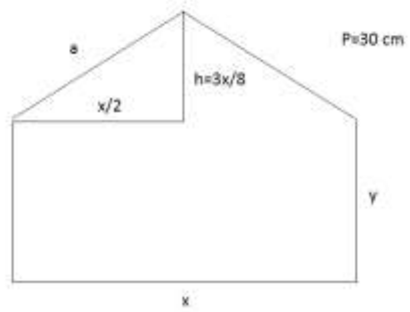
$A''(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi}$; $A''\left(\frac{12}{\pi+4}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} > 0$ Mínimo en $x = \frac{12}{\pi+4}$ m

Sustituyendo en [1] obtenemos $y = \frac{3\pi}{\pi+4}$ m

Los trozos en los que hay que dividir el alambre, para que la suma de las áreas de las figuras que se forman sea mínima, miden $x = \frac{12}{\pi+4} \cong 1{,}68$ metros e $y = \frac{3\pi}{\pi+4} \cong 1{,}32$ metros.

10º) Una ventana normanda está formada por un rectángulo cuya parte superior se ha sustituido por un triángulo isósceles cuya altura es 3/8 de la longitud de la base. Queremos, además, que el perímetro de la ventana sea 30 cm. Calcula las dimensiones de la ventana para que el flujo de luz sea máximo.

Resolución



Sean x e y las dimensiones del rectángulo.

Expresamos el lado a del triángulo isósceles en función de x:

$$a^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3x}{8}\right)^2 \Rightarrow a^2 = \frac{25x^2}{64} \Rightarrow a = \frac{5x}{8}$$

El perímetro de la ventana es $P = x + 2y + 2a = \frac{9x}{4} + 2y$

Su área es $A(x,y) = x \cdot y + \frac{x \cdot \frac{3x}{8}}{2} = x \cdot y + \frac{3x^2}{16}$

Planteamiento: $\left[\begin{array}{ll} \text{maximizar } A(x,y) = x \cdot y + \frac{3}{16}x^2 & \text{función objetivo} \\ s.a \quad \frac{9x}{4} + 2y = 30 & \text{restricción} \end{array}\right.$

Despejando de la restricción tenemos: $y = \frac{30 - \frac{9x}{4}}{2} = \frac{120 - 9x}{8}$ [1] y, sustituyendo en la función objetivo,:

$A(x) = \frac{1}{8}(120x - 9x^2) + \frac{3}{16}x^2$ que es la función área dependiente de una sola variable.

Buscamos el máximo de la función $A(x)$:

$A'(x) = \frac{1}{8}(120 - 18x) + \frac{3x}{8} = \frac{120 - 15x}{8}$; $A'(x) = 0 \iff 120 - 15x \Leftrightarrow x = \frac{120}{15} = 8\ cm$ e $\underbrace{y = 6\ cm}_{[1]}$ m

Comprobamos que, efectivamente, el valor $x = 8$ es máximo de la función área $A(x)$:

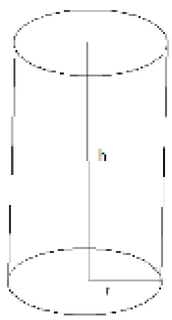
$$A(x) = \frac{-15}{8} \; ; \; A''(8) = -\frac{15}{8} < 0 \quad Máximo\ en\ x = 8$$

Las dimensiones de la ventana de fluyo de luz máximo son 8 cm de largo y 6 cm de ancho en el rectángulo, con lados iguales en el triángulo isósceles de $a = \frac{5x}{8} = 5\ cm$ cada uno y área máxima de $A(8,6) = 48 + 12 = 60\ cm^2$

11º) Una hoja de papel rectangular debe contener 18 cm^2de texto impreso. Los márgenes, superior e inferior y derecho e izquierdo, deben ser de 2 cm y 1 cm respectivamente. Halla las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo. [Solución: 5 cm por 10 cm]

12º) Lanzamos al mercado una nueva bebida y la presentamos en latas cilíndricas de medio litro de capacidad. ¿Cuáles son las dimensiones de la lata más económica?

Resolución



Sea r el radio de la base del cilindro y h su altura.

La lata más económica, de volumen 500 cm^3, será la que tiene área total mínima.

Planteamiento del problema

$\left[\begin{array}{ll} \text{minimizar } A_T(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh & \text{función objetivo} \\ s.a \quad \pi r^2 h = 500 & \text{restricción} \end{array}\right.$

Despejando de la restricción tenemos: $h = \frac{500}{\pi r^2}$ [1] y sustituyendo en la función objetivo:

$A_T(r) = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$ que es la función área total dependiente de la variable r.

Buscamos el mínimo de la función $A_T(r)$:

$$A_T{}'(r) = 4\pi r - \frac{1000}{r^2} \;;\; A_T{}'(r) = 0 \iff 4\pi r = \frac{1000}{r^2} \iff r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \text{ cm y } \underbrace{h = \frac{20}{\sqrt[3]{4\pi}}}_{[1]} \text{ m}$$

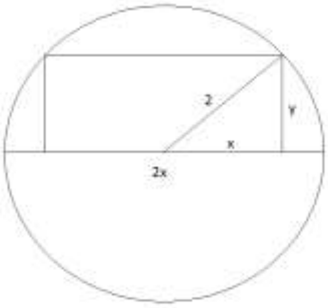
Comprobamos que, efectivamente, el valor $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$ es mínimo de la función área $A_T(r)$:

$$A_T{}''(r) = 4\pi + \frac{2000}{r^3} \;;\; A_T{}''\left(\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}\right) > 0 \;\; Mínimo\ en\ r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$$

Las dimensiones de la lata más económica son las del cilindro de radio de la base $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \cong 4{,}301$ cm y altura $h = \frac{20}{\sqrt[3]{4\pi}} \cong 8{,}603\ cm$

13º) Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un semicírculo de radio r=2 cm.

Resolución



Sean $2x$ e y las medidas, en cm, del rectángulo.

Planteamiento: $\begin{cases} maximizar\ \ A(x,y) = 2x \cdot y & función\ objetivo \\ s.a\ \ x^2 + y^2 = 4 & restricción \end{cases}$

Despejando de la restricción tenemos: $y = \sqrt{4 - x^2}$ [1] y sustituyendo en la función objetivo:

$A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$ que es la función área dependiente de una sola variable.

Buscamos el máximo de la función $A(x)$:

$$A'(x) = 2\left(\sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right) \;;\; A'(x) = 0 \iff \sqrt{4 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \iff 4 - x^2 = x^2 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}\ m$$

e $\underbrace{y = \sqrt{2}\ m}_{[1]}$

Comprobamos que, efectivamente, el valor $x = \sqrt{2}$ es máximo de la función área $A(x)$:

$$A''(x) = 2\left(\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} - \frac{2x\sqrt{4 - x^2} + x^2\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}}{4 - x^2}\right)$$

$$A''(\sqrt{2}) = 2\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}\sqrt{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{2}\right) = 2(-1 - 3) = -8 < 0 \;\; Máximo\ en\ x = \sqrt{2}$$

Las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un semicírculo de radio $r = 2\ cm$ son $2\sqrt{2}\ cm$ de largo por $\sqrt{2}\ cm$ de ancho y el área máxima es $A(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4\ cm^2$

14º) Aprovechando como hipotenusa una valla de $\sqrt{200}$ m de longitud, se desea acotar una superficie triangular de área máxima. ¿Qué medidas deberán tener los otros dos lados?

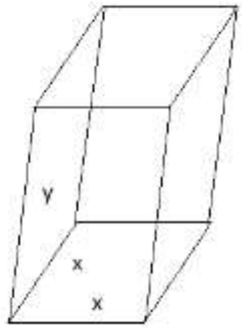
Solución

10 metros cada uno

15º) Halla las dimensiones de una piscina de base cuadrada de 200 m^3 de capacidad de forma que el coste del revestimiento sea mínimo.

Resolución

Sea x la longitud del lado de la base cuadrada e y la altura de la piscina.



El coste del revestimiento es mínimo cuando el área total de la piscina también lo sea.

Planteamiento: $\left[\begin{array}{ll} minimizar\ \ A_T(x,y) = x^2 + 4xy & función\ objetivo \\ s.a\ \ x^2 \cdot y = 200 & restricción \end{array}\right.$

Despejando de la restricción tenemos: $y = \frac{200}{x^2}$ [1] y sustituyendo en la función objetivo:

$A_T(x) = x^2 + \frac{800}{x}$ que es la función área dependiente de una sola variable.

Buscamos el máximo de la función $A_T(x)$:

$A_T{}'(x) = 2x - \frac{800}{x^2}$; $A_T{}'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{800}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{400} = 2\sqrt[3]{50}$ m e $\underbrace{y = \sqrt[3]{50}}_{[1]}$ m

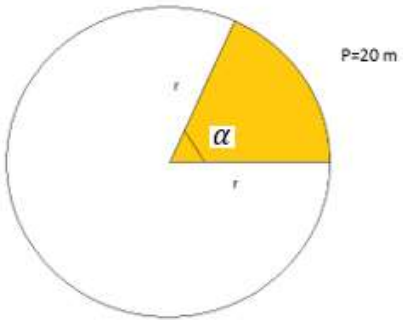
Comprobamos que, efectivamente, el valor $x = 2\sqrt[3]{50}$ es mínimo de la función área $A_T(x)$:

$A_T{}''(x) = 2 + \frac{1600}{x^3}$; $A_T{}''(2\sqrt[3]{50}) > 0$ Mínimo en $x = 2\sqrt[3]{50}$

Las dimensiones de la piscina de 200 m^3 de capacidad y coste del revestimiento mínimo deben ser: la base, un cuadrado de $2\sqrt[3]{50} \cong 7{,}386$ metros de lado y la altura $y = \sqrt[3]{50} \cong 3{,}684$ metros.

16º) Un jardinero debe construir un parterre en forma de sector circular con perímetro 20 m. ¿Cuál será el radio que debe tomar si quiere que el área encerrada sea máxima? ¿Cuál será la amplitud en radianes?

Resolución



α

Sea r el radio, en metros, del sector circular y α la amplitud en grados sexagesimales.

Planteamiento: $\left[\begin{array}{ll} maximizar\ \ A(r,\alpha) = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} & función\ objetivo \\ s.a\ \ \ 2r + \frac{\pi r \alpha}{180} = 20 & restricción \end{array}\right.$

Despejando de la restricción tenemos: $\alpha = \frac{360(10-r)}{\pi r}$ [1] y sustituyendo en la función objetivo:

$A(r) = 10r - r^2$ que es la función área dependiente de una sola variable.

Buscamos el máximo de la función $A(x)$:

$A'(x) = 10 - 2r$; $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 10 - 2r = 0 \Leftrightarrow r = 5$ m y $\underbrace{\alpha = \frac{360}{\pi}\ grados = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ rad}_{[1]}$

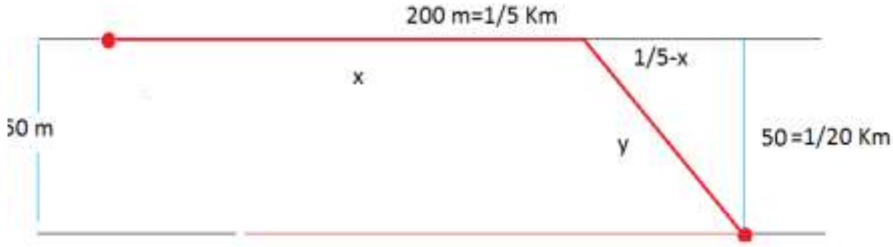
Comprobamos que, efectivamente, el valor $r = 5$ es máximo de la función área $A(r)$:

$A''(r) = -2$; $A''(5) = -2 < 0$ Máximo en $r = 5$

El radio del sector circular de área máxima y perímetro 20 metros debe tener radio $r = 5$ metros y amplitud $\alpha = 2$ radianes.

17º) Una persona se encuentra en la orilla de un río de 50 m de ancho y quiere alcanzar un punto de la otra orilla situado 200 m río abajo. Su velocidad por tierra es 6 Km/h y por el agua de 2 Km/h. ¿Qué distancia debe recorrer por la orilla para alcanzar su objetivo lo antes posible? (Nota: las orillas se suponen rectas y paralelas)

Resolución



Sea x la distancia recorrida por tierra e y la recorrida por agua, en Km.

Tenemos que minimizar el tiempo total empleado. Teniendo en cuenta que $tiempo = \frac{espacio}{velocidad}$, se tiene:

Tiempo en recorrer x km por tierra: $\frac{x}{6}$; Tiempo en recorrer y km por agua: $\frac{y}{2}$

$$función\ objetivo, tiempo\ total\ de\ trayecto\ T(x,y) = \frac{x}{6} + \frac{y}{2}$$

Por otro lado $y^2 = (\frac{1}{5} - x)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2$

Planteamiento: $\left[\begin{array}{ll} minimizar\ \ T(x,y) = \frac{x}{6} + \frac{y}{2} & función\ objetivo \\ s.a\ \ y^2 = (\frac{1}{5} - x)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2 & restricción \end{array}\right.$

Despejando de la restricción tenemos: $y = \sqrt{\frac{1}{25} - \frac{2x}{5} + x^2 + \frac{1}{400}} = \frac{1}{20}\sqrt{17 - 160x + 400x^2}$ [1] y sustituyendo en la función objetivo:

$T(x) = \frac{1}{6}x + \frac{1}{40}\sqrt{17 - 160x + 400x^2}$ que es la función tiempo dependiente de una sola variable.

Buscamos el mínimo de la función $T(x)$:

$T'(x) = \frac{1}{6} + \frac{10x-2}{\sqrt{17-160x+400x^2}}$; $T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-10x}{\sqrt{17-160x+400x^2}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 12 - 60x = \sqrt{17 - 160x + 400x^2}$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

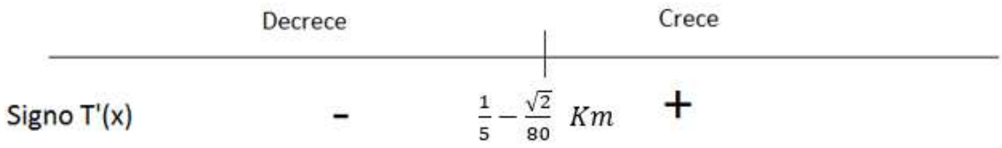
$$144 - 1440x + 3600x^2 = 17 - 160x + 400x^2\ ;\ \ 3200x^2 - 1280x + 127 = 0\ ;$$

$$x = \frac{1280 \pm \sqrt{1638400 - 1625600}}{6400} = \frac{1280 \pm \sqrt{12800}}{6400} = \begin{cases} \frac{1280 + \sqrt{12800}}{6400}\ Km\ No\ válida\ \left(> \frac{1}{5}\right) \\ \frac{1280 - \sqrt{12800}}{6400} = \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{2}}{80}\ \ Km \cong 182{,}322\ m \end{cases}$$

Debe recorrer por la orilla $\frac{1}{5} - \frac{\sqrt{2}}{80}$ $Km \cong 182{,}322\ m\ para\ minimizar\ el\ tiempo\ total\ empleado$

Comprobamos que, efectivamente, el valor $x = \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{2}}{80}$ $Km \cong 182{,}322\ m$ es mínimo:

Utilizamos el signo de la primera derivada:



18º) El coste de un marco para una ventana rectangular es de 50 euros por cada metro de lado vertical y de 25 euros por cada metro de lado horizontal. Se desea construir una ventana de superficie igual a $2m^2$. Calcúlense sus dimensiones (largo y alto) para que el marco sea lo más barato posible. Calcúlese el precio mínimo del marco de dicha ventana.

19º) Se desea fabricar un acuario con base cuadrada y sin tapa, de capacidad 500 dm^3. La base y las paredes del acuario han de estar realizadas en cristal. Determina cuáles deben ser sus medidas para minimizar el material empleado en su construcción.

Solución

10 dm de base y 5 dm de altura

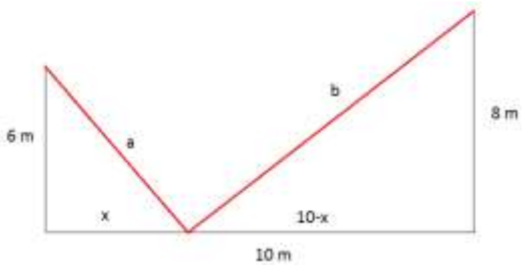
20º) Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que dada la estructura de la empresa sólo puede optar por dos tipos de alarmas, de tipo A o de tipo B; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como el producto entre el número de alarmas de tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas de tipo B. ¿Cuántas alarmas de cada tipo se deben instalar en la empresa para maximizar su seguridad? Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.

Solución

3 alarmas tipo A y 6 alarmas tipo B

21º) Dos postes con longitudes de 6 y 8 metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 10 metros. Calcule aproximadamente la longitud mínima de un cable que pueda ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste.

Resolución



Sean $x, 10-x, a$ y b las medidas, en m, que figuran en la imagen.

La longitud de cable a minimizar es $a+b$.

Por otro lado, se tiene $a^2 = x^2+36$; $b^2 = (10-x)^2+64$

$$a = \sqrt{x^2+36} \ ; \ b = \sqrt{x^2-20x+164}$$

Planteamiento: *minimizar* $L(x) = \sqrt{x^2+36} + \sqrt{x^2-20x+164}$ *función objetivo*

Buscamos el mínimo de la función $L(x)$:

$$L'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+36}} + \frac{x-10}{\sqrt{x^2-20x+164}}$$

$L'(x) = 0 \iff; \iff \frac{x}{\sqrt{x^2+36}} + \frac{x-10}{\sqrt{x^2-20x+164}} = 0 \iff \frac{x}{\sqrt{x^2+36}} = \frac{10-x}{\sqrt{x^2-20x+164}}$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{x^2}{x^2+36} = \frac{100-20x+x^2}{x^2-20x+164} \iff x^2(x^2-20x+164) = (x^2+36)(100-20x+x^2)$$

$$x^4-20x^3+164x^2 = x^4-20x^3+136x^2-720x+3600 \iff 28x^2+720x-3600 = 0$$

$$7x^2+180x-900 = 0$$

$$x = \frac{-180 \pm \sqrt{32400+25200}}{14} = \frac{-180 \pm \sqrt{57600}}{14} = \frac{-180 \pm 240}{14} = \begin{cases} \frac{30}{7} \\ -\frac{210}{7} \ \textit{no válida} \end{cases}$$

En lugar de comprobar con la segunda derivada que el valor obtenido es mínimo de la función $L(x)$, lo vamos a hacer estudiando el crecimiento y decrecimiento de $L(x)$ a la izquierda y derecha de $x = \frac{30}{7}$ en un entorno cercano

Por tanto, en $x = \frac{30}{7}$, la función longitud alcanza un mínimo

$$L\left(\frac{30}{7}\right)=\sqrt{\left(\frac{30}{7}\right)^2+36}+\sqrt{\left(\frac{30}{7}\right)^2-\frac{600}{7}+164}\approx 7{,}373+9{,}831=17{,}204\ m$$

Longitud mínima $17{,}204\ m$

22º) Un arquitecto quiere construir un jardín rectangular en un terreno circular de 100 metros de radio. Halla las dimensiones de dicho jardín para que el área sea máxima.

23º) Si un cultivador valenciano planta 200 naranjos por hectárea, el rendimiento promedio es de 300 naranjas por árbol. Por cada árbol adicional que siembre por hectárea, el cultivador obtendrá 15 naranjas menos por árbol. ¿Cuántos árboles por hectárea darán la mejor cosecha?

Resolución

Sea x el número de árboles (naranjos) plantados, adicionales a los 200 por hectárea. Esos x árboles producirán $300-15x$ naranjas.
La cosecha, número de naranjas, será: $C(x)=(200+x)\cdot(300-15x)=-15x^2-2700x+60000$
Planteamiento: $maximizar\ \ C(x)=-15x^2-2700x+60000$ $\ función\ objetivo$ con $x\geq 0$

$$C'(x)=-30x-2700<0\ \ porque\ x\geq 0, es\ decir, la\ función\ Cosecha\ C(x)\ es\ decreciente$$

En consecuencia, sin plantar árboles la producción que se obtiene es mejor que si aumentamos el número de frutales de esta variedad.

$$Cosecha\ máxima\ C(0)=60000\ naranjas$$

24º) Una esmeralda pesa 16 gr y sabemos que su valor es proporcional al cuadrado de su peso. Si partimos en dos trozos la esmeralda, halla el peso que debe tener cada uno de ellos para que su valor sea mínimo.

Resolución

Sean x e y el peso, en gramos, de cada uno de los trozos en que se divide la esmeralda y k la constante de proporcionalidad ($k>0$).
El planteamiento del problema es:

$$\left[\begin{array}{lll} minimizar & V(x,y)=k(x^2+y^2) & función\ objetivo \\ s.a & x+y=16 & restricción \end{array}\right.$$

$$y=16-x$$

Sustituyendo en la función objetivo: $V(x)=k(x^2+(16-x)^2)=k(2x^2-32x+256)$ minimizar

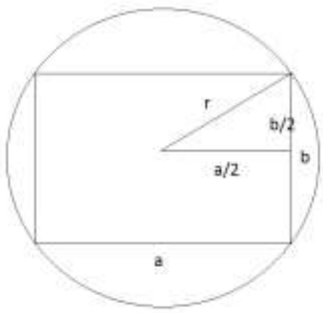
$$V'(x)=k(4x-32)\ ;\ \ V'(x)=0\Leftrightarrow 4x-32=0\Leftrightarrow x=8$$

$$V''(x)=4k\ \ ;\ \ V''(8)=4k>0\ \ ;\ \ Mínimo\ en\ x=8$$

La esmeralda debe partirse en dos trozos de igual peso, $x=y=8\ gr$ para que su valor sea mínimo.

25º) Comprueba que el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en una circunferencia de ecuación $x^2+y^2=r^2$ es un cuadrado de lado $\sqrt{2}r$.

Resolución



Una circunferencia de ecuación $x^2+y^2=r^2$ está centrada en el origen de coordenadas y tiene radio r
Sean a y b las dimensiones del rectángulo.
El planteamiento del problema es:

$$\left[\begin{array}{lll} maximizar & A(a,b)=a\cdot b & función\ objetivo \\ s.a & \left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=r^2 & restricción \end{array}\right.$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=r^2\Leftrightarrow a^2+b^2=4r^2\Longrightarrow b=\sqrt{4r^2-a^2}$$

Se trata de $maximizar\ \ A(a)=a\cdot\sqrt{4r^2-a^2}$:

$$A'(a) = \sqrt{4r^2 - a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

$$A'(a) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4r^2 - a^2} = \frac{a^2}{\sqrt{4r^2 - a^2}} \Leftrightarrow 4r^2 - a^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 = 2r^2 \Leftrightarrow a = +\sqrt{2}r$$

Se comprobaría que el valor obtenido es máximo.

$$b = \sqrt{4r^2 - a^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2}r$$

Por tanto, se trata de un cuadrado de lado $\sqrt{2}r$