Aplicaciones de la derivada

1º) Calcula los máximos y mínimos de la función $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$

Solución

Máximo en $P(-6, -12)$; Mínimo en $Q(0, 0)$

2º) Determina el parámetro c para que la función $f(x) = x^2 + 2x + c$ tenga un mínimo igual a 8.

Resolución

$f'(x) = 2x + 2$; $f'(x) = 0 \Longrightarrow 2x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -1$; $f''(-1) = 2 > 0$ Mínimo en $x = -1$

$f(-1) = -1 + c = 8 \Longrightarrow c = 9$

3º) Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 5$, halla el valor de a para que tenga un extremo relativo en $x = 2$.

Solución

$a = -3$

4º) Obtener los valores de a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenga un mínimo relativo en el punto $P(2,3)$.

Solución

$a = -3$ y $b = 7$

5º) La segunda derivada de un polinomio de segundo orden que pasa por el punto $A(1, 17)$ es 4. Hallar el polinomio si se sabe que tiene un mínimo en $x = -1$.

Resolución

Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$ el polinomio de segundo grado que buscamos y $P'(x) = 2ax + b$ y $P''(x) = 2a$ su primera y segunda derivada respectivamente.

$P(x)$ pasa por el punto $A(1, 17)$: $P(1) = 17 \Longrightarrow a + b + c = 17$ [1]

La derivada segunda de $P(x)$ es 4: $P''(x) = 2a = 4 \Longrightarrow a = 2$ [2]

$P(x)$ tiene un mínimo en $x = 1$: $P'(1) = 0 \Longrightarrow 2a + b = 0$ [3]

El sistema de ecuaciones con las expresiones [1], [2] y [3] es:

$\begin{cases} a + b + c = 17 \\ a = 2 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$ de donde $a = 2$; $b = -4$; $c = 19$ y el polinomio es $P(x) = 2x^2 - 4x + 19$

6º) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, calcula a, b, c para que el punto $A(1,5)$ y el punto de abscisa $x = 2$ sean extremos relativos.

Solución

De las condiciones del ejercicio obtenemos el sistema $\begin{cases} a + b + c = 5 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases}$

cuya solución es $a = 2$; $b = -9$; $c = 12$

7º) Halla a y b para que la función $f(x) = aLx + bx^2 + x$ tenga extremos en los puntos $x = 1$ y $x = 2$.
Para esos valores de a y b, ¿qué tipo de extremos tiene la función en $x = 1$ y en $x = 2$?

Solución

$a = -\frac{2}{3}$; $b = -\frac{1}{6}$

$f''(x) = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$ $\left[\begin{array}{l} f''(1) = \frac{1}{3} > 0 \quad \text{Mínimo en el punto de abscisa } x = 1 \\ f''(2) = \frac{-1}{6} < 0 \quad \text{Máximo en el punto de abscisa } x = 2 \end{array} \right.$

8º) Calcula las rectas tangentes a la curva $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ en los puntos de inflexión.

Resolución

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \;;\; f''(x) = 6x - 6 \;;\; f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$
$$f'''(x) = 6 \;;\; f'''(1) = 6 \neq 0 \;\; Punto\ de\ inflexión\ en\ P(1,0)$$
$$f(1) = 0 \;;\; f'(1) = -3$$

Recta tangente en P: $t \equiv y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1)$; $t \equiv y = -3(x-1)$

9º) Halla el valor de b y m para que la curva $f(x) = x^3 + bx^2 + mx + 1$ tenga en el punto $A(0,1)$ una inflexión y la pendiente de la recta tangente valga 1.

Resolución

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + m \;;\; f''(x) = 6x + 2b$$

$A(0,1)$ inflexión$\Longrightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \\ f''(0) = 0 \Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0 \end{cases}$

Pendiente de la recta tangente vale 1$\Leftrightarrow f'(0) = 1 \Leftrightarrow m = 1$

10º) ¿Qué valores deben tomar b y c para que $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1$ tenga un punto extremo en $x = 1$ y un punto de inflexión en $x = 0$? El extremo que se obtiene en $x = 1$, ¿es un máximo o un mínimo?

Solución

$b = 0$; $c = -3$; Mínimo en $P(1,-1)$

11º) La función $f(x) = x^3 - ax^2 + 4x + b$ corta al eje de abscisas en $x = 3$ y tiene un punto de inflexión en $x = 2/3$. Halla a y b.

Resolución

$f'(x) = 3x^2 - 2ax + 4$; $f''(x) = 6x - 2a$

$f(x) = x^3 - ax^2 + 4x + b$ corta al eje de abscisas en $x = 3 \Longrightarrow f(3) = 0 \Longrightarrow 27 - 9a + 12 + b = 0$

$f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow f''\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow 4 - 2a = 0 \Rightarrow a = 2$

Sustituyendo en $\underbrace{27 - 9a + 12 + b = 0}_{a=2}$, obtenemos $b = -21$.

La función es $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 21$

12º) Estudia el crecimiento y decrecimiento, la curvatura y puntos de inflexión de las funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ **b)** $f(x) = \frac{1}{x+1}$ **c)** $f(x) = x \cdot Lx$ **d)** $f(x) = (x-1) \cdot e^{-x}$

Solución

a) Creciente: $(-1,0) \cup (1,+\infty)$; Decreciente: $(-\infty,-1) \cup (0,1)$

Convexa: $(-\infty,0)$; Cóncava: $(0,+\infty)$

b) Decreciente en su dominio. Convexa: $(-\infty,-1)$; Cóncava: $(-1,+\infty)$

c) Decreciente: $\left(0,\frac{1}{e}\right)$; Creciente: $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$. Cóncava en su dominio.

d) Creciente: $(-\infty,2)$; Decreciente: $(2,+\infty)$.

Convexa: $(-\infty,3)$; Cóncava: $(3,+\infty)$. Punto de inflexión $P\left(3,\frac{2}{e^3}\right)$

Resolución

Curvatura

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$; $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$; $f''(x) = \frac{2x^3-2x(x^2-1)}{x^4} = \frac{2}{x^3}$

Estudiamos el signo de la segunda derivada $f''(x) = \frac{2}{x^3}\begin{cases} > 0 \Leftrightarrow x > 0 \; Cóncava\ en\ (0,+\infty) \\ < 0 \Leftrightarrow x < 0 \; Convexa\ en\ (-\infty,0) \end{cases}$

En $x=0$, la función pasa de ser convexa a ser cóncava; sin embargo, la función no está definida. Por tanto, no hay puntos de inflexión

b) $f(x)=\frac{1}{x+1}$; $f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}$; $f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}\begin{cases} >0 \Leftrightarrow x>-1 \; Cóncava \; en \; (-1,+\infty) \\ <0 \Leftrightarrow x<-1 \; Convexa \; en \; (-\infty,-1) \end{cases}$

No tiene puntos de inflexión porque en $x=-1$ la función no está definida.

c) $f(x)=x\cdot Lx$; $f'(x)=Lx+1$: $f''(x)=\frac{1}{x}\begin{cases} >0 \Leftrightarrow x>0 \; Cóncava \; en \; (0,+\infty) \\ <0 \; La \; función \; f \; no \; está \; definida \; para \; x\le 0 \end{cases}$

La función es Cóncava en su dominio $(0,+\infty)$ y, por tanto, no tiene puntos de inflexión.

d) $f(x)=(x-1)\cdot e^{-x}$; $f'(x)=e^{-x}-(x-1)e^{-x}=e^{-x}(2-x)$

$$f''(x)=-e^{-x}(2-x)-e^{-x}=e^{-x}(x-3)\begin{cases} >0 \Leftrightarrow x>3 \; Cóncava \; en \; (3,+\infty) \\ <0 \Leftrightarrow x<3 \; Convexa \; en \; (-\infty,3) \end{cases}$$

Por tanto, hay punto de inflexión en la abscisa $x=3$, en el punto $P\left(3,\frac{2}{e^3}\right)$

13º) Determina en qué puntos no son derivables las funciones siguientes:

a) $f(x)=|x-1|$ **b)** $f(x)=|x^2-4|$

Solución

a) $f(x)$ no es derivable en $x=1$
b) $f(x)$ no es derivable en $x=-2$ y $x=2$

14º) El coste de producción de x unidades diarias de un determinado producto viene dado por $C(x)=\frac{1}{4}x^2+35x+25$ y el de venta de una de ellas es $\left(50-\frac{x}{4}\right)$ euros. Halla el número de unidades que deben venderse diariamente para que el beneficio sea máximo.

Resolución

El beneficio viene dado por $B(x)=x\left(50-\frac{x}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}x^2+35x+25\right)=-\frac{1}{2}x^2+15x-25$
Hallamos el máximo de esta función:

$B'(x)=-x+15$; $B'(x)=0 \Rightarrow -x+15=0 \Rightarrow x=15$

$B''(15)=-1<0$ *máximo* en $x=15$

Por tanto deben venderse 15 unidades diarias para obtener un beneficio máximo de $B(15)=87'5$ euros.

15º) Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=\frac{3x}{x^2-2}$

a) Especifíquese su dominio de definición y los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados. Determínense las asíntotas de f.

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

Resolución

a) Puntos que anulan el denominador: $x^2-2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Dominio de la función: $D(f)=\mathbb{R}-\{\pm\sqrt{2}\}$

Corte de la gráfica de f con el eje OX: $y=f(x)=0 \Rightarrow \frac{3x}{x^2-2}=0 \Rightarrow 3x=0 \Rightarrow x=0$. O(0,0)

Corte de la gráfica de f con el eje OY: $x=0 \Rightarrow y=f(0)=0$

Asíntotas verticales: $x=\pm\sqrt{2}$

Asíntota horizontal: $y=0$ $\left[\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2-2}=0\right]$

b) $x=1 \Rightarrow f(1)=-3$: $P(1,-3)$

Función derivada: $f'(x)=\frac{-3(x^2+2)}{(x^2-2)^2}$; Pendiente: $m=f'(1)=-9$

La recta tangente a la gráfica de f en P es: $t \equiv y+3=-9(x-1)$; $t \equiv y=-9x+6$

16º) Se considera el rectángulo (R) de vértices $BOAC$ con $B(O,b), 0(0,0), A(a,0), C(a,b)$, $a>0$, $b>0$, y cuyo vértice C está situado en la parábola de ecuación $y=-x^2+12$.
a) Para $a=3$, determínense las coordenadas de los vértices de (R) y calcúlese el área de (R).
b) Determínense las coordenadas de los vértices de (R) de manera que el área de (R) sea máxima.
c) Calcúlese el valor de dicha área máxima.
Resolución
a) $a=3$: Como el punto $C(a,b)$ está situado en la parábola de ecuación $y=-x^2+12$, se tiene que $b=-a^2+12=-9+12=3$. Así, las coordenadas de los vértices del rectángulo R son $A(3{,}0), B(0{,}3) y\ C(3{,}3)$, además del origen $O(0{,}0)$ y el área de éste $9\,u^2$.
b) Como el punto $C(a,b)$ está situado en la parábola, $b=-a^2+12$. El área del rectángulo de vértices $B(O,-a^2+12), 0(0,0), A(a,0)$ y $C(a,-a^2+12)$ viene dado por la función $f(a)=a\cdot(-a^2+12)$ que tenemos que maximizar. Buscamos el máximo de la función área:
Derivando, $f'(a)=-3a^2+12$; $f'(a)=0 \Rightarrow a=\pm 2$; $f''(a)=-6a$; $f''(2)=-12<0$
Por tanto, la función área alcanza su máximo en $a=2$ y las coordenadas de los vértices de (R) que hacen máxima su área son $B(O,8), 0(0,0), A(2,0), C(2{,}8)$.
c) El valor del área máxima es $f(2)=16\,u^2$.

17º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=(x^2-1)^2$
a) Determínense los extremos relativos de f.
b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=3$.
Resolución
a) Función derivada: $f'(x)=4x(x^2-1)=4x^3-4x$
Valores que anulan la derivada: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$
Determinamos los extremos relativos con el criterio de la segunda derivada:

$$f''(x)=12x^2-4 \left[\begin{array}{ll} f''(-1)=8>0 & \textit{Mínimo en el punto } P(-1{,}0) \\ f''(0)=-4<0 & \textit{Máximo en el punto } Q(0{,}1) \\ f''(1)=8>0 & \textit{Mínimo en el punto } R(1{,}0) \end{array} \right.$$

b) $x=3 \Rightarrow f(3)=64$; pendiente: $m=f'(3)=96$
La ecuación de la recta t tangente a la gráfica de f en el punto $P(3,64)$ es:

$$t \equiv y-64=96(x-3) \quad \text{o, lo que es lo mismo} \quad t \equiv y=96x-222$$

18º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$
a) Determínense sus asíntotas.
b) Determínese el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

19º) Dada la función $f(x)=ln\frac{x^2}{x-1}$, definida para $x>1$, hallar un punto $P(a,f(a))$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea paralela al eje de abscisas.
[Sol: P(2, 2ln2)**]**

20º) La derivada de una función polinómica f es la función cuadrática $g(x)=2x^2+5x-3$. ¿Qué podemos afirmar sobre los extremos de la función f?

21º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\frac{x^2+x+6}{x-2}$
a) Determínense su dominio y sus asíntotas
b) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$
EvAU. Madrid. Junio2017. Opción A

22º) Dada la función $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x}\cdot Lx}{2^x} & si\ x>0\\ x+k & si\ x\leq 0\end{cases}$ obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.

[Sol: $y=\frac{1}{2}\cdot(x-1)$**]**

23º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$. Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva.

Resolución

Buscamos puntos de inflexión:

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+3)^2}\ ;\ f''(x)=\frac{-2\cdot(x^2+3)^2+2x\cdot 2(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4}=\frac{6x^2-6}{(x^2+3)^3}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{6x^2-6}{(x^2+3)^3}=0 \Leftrightarrow 6x^2-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1\\ x=-1\end{cases}$ Posibles puntos de inflexión

Se comprueba con $f'''(x)$ que lo son.

El punto de inflexión de abscisa positiva es $P\left(1,\frac{1}{4}\right)$; $f'(1)=\frac{-1}{8}$

Recta tangente en P: $t\equiv y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$; $t\equiv y-\frac{1}{4}=\frac{-1}{8}(x-1)\equiv y=-\frac{x}{8}+\frac{3}{8}$

24º) Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)=x^2\cdot senx$ en el punto de abscisa $x=\pi$.

[Sol: $y=\frac{1}{\pi^2}\cdot(x-\pi)$**]**

25º) Dada la función $f(x)=\frac{x^2-3}{e^x}$ se pide:

a) Determinar los máximos y mínimos relativos y asíntotas de la función justificando la existencia o no de cada una de ellas.

b) Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a $f(x)$ en el punto $x=-1$.

[Sol: a) Mínimo relativo $P(-1,-2e)$. Máximo relativo $Q\left(3,\frac{6}{e^3}\right)$. $Asíntota\ horizontal\ y=0$. $b)$ Recta tangente $y=-2e$ $y\ normal\ x=-1$ **]**

26º) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $2x^3-6x+1=0$ en el intervalo $[0,2]$?

Resolución

Sea $f(x)=2x^3-6x+1$, función continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [0,1]\\ f(0)=1>0\\ f(1)=-3<0\end{array}\right\}\overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow}\ \exists c_1\in(0,1)\ tal\ que\ f(c_1)=0\Leftrightarrow 2{c_1}^3-6c_1+1=0$$

Así, c_1 es raíz de la ecuación $2x^3-6x+1=0$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [1,2]\\ f(1)=-3<0\\ f(2)=5>0\end{array}\right\}\overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow}\ \exists c_2\in(1,2)\ tal\ que\ f(c_2)=0\Leftrightarrow 2{c_2}^3-6c_2+1=0$$

Así, c_2 es raíz de la ecuación $2x^3-6x+1=0$.

Veamos que la ecuación no tiene más soluciones:

Supongamos que c_3 fuese otra raíz de la ecuación; así $2{c_3}^3-6c_3+1=0$ $y\ f(c_3)=0$

Suponemos, sin pérdida de generalidad que $c_1<c_2<c_3$

Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo (c_1,c_2) se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [c_1,c_2]\\ f(x)\ derivable\ en\ (c_1,c_2)\\ f(c_1)=f(c_2)\end{array}\right\}\Longrightarrow \exists x_1\in(c_1,c_2)\ tal\ que\ f'(x_1)=0$$

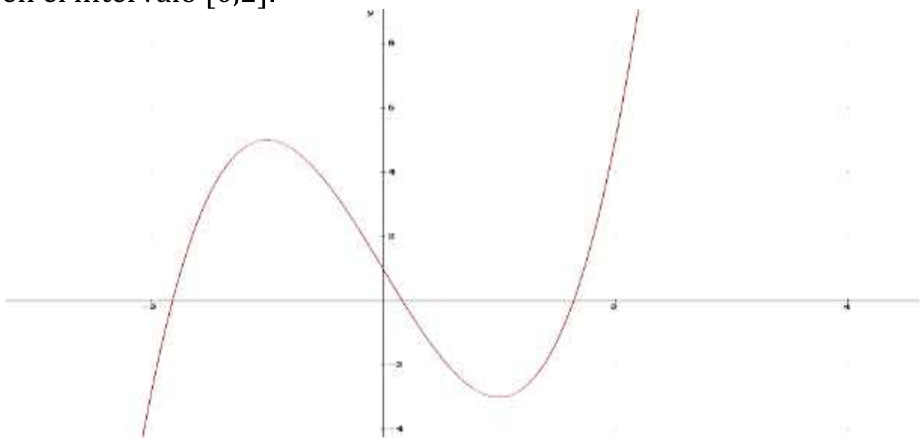
Análogamente, aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo (c_2,c_3) se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [c_2,c_3] \\ f(x)\ derivable\ en\ (c_2,c_3) \\ f(c_2)=f(c_3) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists x_2 \in (c_2,c_3)\ tal\ que\ f'(x_2)=0$$

es decir, encontramos dos puntos $x_1\ y\ x_2$ dentro del intervalo (0,2) de derivada nula:

$$f'(x_1)=f'(x_2)=0$$

Sin embargo, $f'(x)=6x^2-6$ y $6x^2-6=0$ que tiene soluciones $x=\pm 1$ lo que contradice la existencia de dos valores $x_1\ y\ x_2$ con derivada nula en (0,2). La contradicción viene de suponer la existencia de una tercera raíz c_3. Por tanto, la ecuación tiene exactamente dos raíces $c_1\ y\ c_2$ en el intervalo [0,2].



27º) Demuestra que la ecuación $6x^5+2x+7=0$ solo tiene una raíz.

Resolución

Sea $f(x)=6x^5+2x+7$, función continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [-1,0] \\ f(-1)=-1<0 \\ f(0)=7>0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_1 \in (-1,0)\ tal\ que\ f(c_1)=0 \Leftrightarrow 6{c_1}^5+2c_1+7=0$$

Así, c_1 es raíz de la ecuación $6x^5+2x+7=0$

Veamos que la ecuación no tiene más soluciones:

Supongamos que c_2 fuese otra raíz de la ecuación; así $6{c_2}^5+2c_2+7=0\ \ y\ f(c_2)=0$

Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo (c_1,c_2) se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [c_1,c_2] \\ f(x)\ derivable\ en\ (c_1,c_2) \\ f(c_1)=f(c_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists x_1 \in (c_1,c_2)\ tal\ que\ f'(x_1)=0$$

Sin embargo, $f'(x)=30x^4+2$ y $30x^4+2=0$ no tiene solución real, es decir no hay puntos de derivada nula lo que contradice la existencia de $x_1 \in (c_1,c_2)\ tal\ que\ f'(x_1)=0$. La contradicción viene de suponer la existencia de una segunda raíz c_2 de la ecuación. Por tanto, la ecuación $6x^5+2x+7=0$ solo tiene una raíz $c_1 \in (-1,0)$.

28º) Aplica el teorema del valor medio a $f(x)$ en el intervalo $[-2,0]$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si\ -2\le x\le -1 \\ \dfrac{x^2-3}{2} & si\ -1<x\le 0 \end{cases}$$

29º) Aplicar el Teorema de Cauchy a las funciones $f(x)=3x+2$ y $g(x)=x^2+1$ en $[1,4]$.

30º) Dada la función $f(x)=\begin{cases} \frac{\ln(1+2x^2)}{x^2-3x} & si\ x\neq 0 \\ a-2 & si\ x=0 \end{cases}$ calcula el valor del parámetro a para la función tome todos los valores comprendidos entre $f(-1)$ y $f(1)$.

Resolución

$\forall x \in \mathbb{R}\ x \neq 0,\ f(x) = \frac{\ln(1+2x^2)}{x^2-3x}$ continua por ser cociente y composición de continuas y no anularse el denominador; en particular en $[-1,0) \cup (0,1]$

Para $x = 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x^2)}{x^2-3x} \overset{L'Hôp}{\triangleq} \lim_{x\to 0} \frac{4x}{(2x-3)\cdot(1+2x^2)} = 0$

La función f es continua en $x = 0$ si $f(0) = a - 2 = 0$, de donde $a = 2$.

Por tanto, para $a = 2$

$$f(x)\ continua\ en\ [-1,1] \overset{T.de\ Val\ I}{\Rrightarrow} f\ toma\ todos\ los\ valores\ comprendidos\ entre\ f(-1)y\ f(1)$$

31º) Calcula, utilizando la regla de L'Hôpital, los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{L(e^x+x^3)}{x}$ **b)** $\lim_{x\to 0} \frac{L(cos3x)}{x^2}$ **c)** $\lim_{x\to 0} \frac{x-senx}{x\cdot senx}$ **d)** $\lim_{x\to 0} \frac{senx-x}{x-tgx}$

e) $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (cosx \cdot L(tgx))$ **f)** $\lim_{x\to 0} (cosx + senx)^{\frac{1}{x}}$ **g)** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx^{cosx}$ **h)** $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$

i) $\lim_{x\to+\infty} \left(x \cdot (\sqrt[x]{a} - 1)\right)$ **j)** $\lim_{x\to 0} (cos2x)^{3/x^2}$ **k)** $\lim_{x\to 0} (e^x + x^3)^{1/x}$ **l)** $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{lnx}\right)$

[Solución: a) 1 **b)** $-9/2$ **c)** 0 **d)** ½ **e)** 0 **f)** e **g)** 1 **h)** 1 **i)** *La* **j)** $1/e^6$ **k)** *e* **l)** -1/2**]**

Resolución

$\boldsymbol{a})$ $\lim_{x\to 0} \frac{L(e^x+x^3)}{x} \overset{\frac{0}{0} L'Hôp}{\triangleq} \lim_{x\to 0} \frac{e^x+3x^2}{e^x+x^3} = 1$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{L(cos3x)}{x^2} \overset{\frac{0}{0} L'Hôp}{\triangleq} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-3sen3x}{cos3x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-3tg3x}{2x} \overset{\frac{0}{0} L'Hôp}{\triangleq} \lim_{x\to 0} \frac{-9}{2cos^2 3x} = -\frac{9}{2}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{x-senx}{x\cdot senx} \overset{\frac{0}{0} L'Hôp}{\triangleq} \lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{senx+xcosx} \overset{\frac{0}{0} L'Hôp}{\triangleq} \lim_{x\to 0} \frac{senx}{cosx+cosx-xsenx} = \frac{0}{2} = 0$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{senx-x}{x-tgx} \overset{\frac{0}{0} L'Hôp}{\triangleq} \lim_{x\to 0} \frac{cosx-1}{1-\frac{1}{cos^2x}} \overset{\frac{0}{0} L'Hôp}{\triangleq} \lim_{x\to 0} \frac{-senx}{\frac{-2senx}{cos^3x}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{cos^3x}{2}\right) = \frac{1}{2}$

e) $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (cosx \cdot L(tgx)) \overset{0\cdot(+\infty)}{\triangleq} \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{L(tgx)}{\frac{1}{cosx}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}, L`Hôp}{\triangleq} \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\frac{1}{tgx\cdot cos^2x}}{\frac{senx}{cos^2x}} = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\frac{1}{tgx\cdot cos^2x}}{\frac{senx}{cos^2x}} = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{cosx}{sen^2x} = 0$

f) $\lim_{x\to 0} (cosx + senx)^{\frac{1}{x}} \overset{1^\infty}{\triangleq}$

$$L\left(\lim_{x\to 0} (cosx + senx)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0} L(cosx + senx)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} \cdot L(cosx + senx)\right) \overset{0.\infty}{\triangleq} \lim_{x\to 0} \frac{L(cosx + senx)}{x} \overset{\frac{0}{0}, L`Hôp}{\triangleq}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{cosx - senx}{cosx + senx} = 1$$

Así, $L\left(\lim_{x\to 0} (cosx + senx)^{\frac{1}{x}}\right) = 1$, de donde $\lim_{x\to 0} (cosx + senx)^{\frac{1}{x}} = e$

g) $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} tgx^{cosx} \overset{+\infty^0}{\triangleq}$

$$L\left(\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} tgx^{cosx}\right) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} L(tgx^{cosx}) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (cosx \cdot L(tgx)) \overset{0.\infty}{\triangleq} \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{L(tgx)}{\frac{1}{cosx}} \overset{\frac{\infty}{\infty}, L`Hôp}{\triangleq}$$

$$= \lim_{\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}} \frac{\frac{1}{tgx \cdot cos^2x}}{\frac{senx}{cos^2x}} = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{cosx}{sen^2x} = 0$$

$$\text{Así, } L\left(\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} tgx^{cosx}\right) = 0, \text{ de donde } \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} tgx^{cosx} = e^0 = 1$$

h) $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} \overset{\infty^0}{\triangleq}$

$$L\left(\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}\right) = \lim_{x\to+\infty} L(x^{1/x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{Lx}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty} L'H\hat{o}p}{\triangleq} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{Así, } L\left(\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}\right) = 0, \text{ de donde } \lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = e^0 = 1$$

i) $\lim_{x\to+\infty} \left(x\cdot\left(\sqrt[x]{a}-1\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x\cdot\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)\right) \overset{\infty\cdot 0}{\triangleq} \lim_{x\to+\infty} \frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{0}{0} L'H\hat{o}p}{\triangleq} \lim_{x\to+\infty} \frac{a^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}\cdot La}{\frac{-1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \left(a^{\frac{1}{x}}\cdot La\right) = La$

j) $\lim_{x\to 0} (cos2x)^{3/x^2} \overset{1^\infty}{\triangleq}$

$$L\left(\lim_{x\to 0}(cos2x)^{3/x^2}\right) = \lim_{x\to 0} L(cos2x)^{3/x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{3L(cos2x)}{x^2} \overset{\frac{0}{0} L'H\hat{o}p}{\triangleq} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-6sen2x}{cos2x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-3tg2x}{x} \overset{\frac{0}{0} L'H\hat{o}p}{\triangleq} \lim_{x\to 0}\frac{-6}{cos^2 2x} = -6$$

$$\text{Así, } L\left(\lim_{x\to 0}(cos2x)^{3/x^2}\right) = -6, \text{ de donde } \lim_{x\to 0}(cos2x)^{3/x^2} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

k) $\lim_{x\to 0}(e^x+x^3)^{1/x} \overset{1^\infty}{\triangleq}$

$$L\left(\lim_{x\to 0}(e^x+x^3)^{1/x}\right) = \lim_{x\to 0} L(e^x+x^3)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{L(e^x+x^3)}{x} \overset{\frac{0}{0} L'H\hat{o}p}{\triangleq} \lim_{x\to 0}\frac{e^x+3x^2}{e^x+x^3} = 1$$

$$\text{Así, } L\left(\lim_{x\to 0}(e^x+x^3)^{1/x}\right) = 1, \text{ de donde } \lim_{x\to 0}(e^x+x^3)^{1/x} = e$$

l) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{lnx}\right) \overset{\infty-\infty}{\triangleq} \lim_{x\to 1}\frac{Lx-x+1}{(x-1)\cdot Lx} \overset{\frac{0}{0} L'H\hat{o}p}{\triangleq} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{Lx+\frac{x-1}{x}} \overset{\frac{0}{0} L'H\hat{o}p}{\triangleq} \lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}$

32º) Un punto se desplaza siguiendo un movimiento de ecuación $f(t) = 3t + ln(t+2)$, donde t mide el tiempo en segundos. ¿En qué instante alcanza la velocidad media que desarrolla en los cuatro primeros segundos? [**Solución:** 1,64 s]

33º) Se sabe que $\lim_{x\to 0}\frac{x-asenx}{x^2}$ es finito. Calcula el valor de a y su límite. [**Solución:** $a = 1$; $límite$ 0]

34º) Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{arctgx-x}{x^3}$ [**Solución: -1/3**]

35º) Halla b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2+bx+c & si\ x\le 0 \\ \frac{ln(1+2x)}{x} & si\ x>0 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en cualquier intervalo.
Calcula el valor o valores de x para los que se cumple la tesis en el intervalo $[-2,0]$.

36º) Demuestra que la ecuación $x^2 = x\cdot senx + cosx$ tiene exactamente dos raíces reales en el intervalo $[-\pi,\pi]$.
Resolución

Sea $f(x) = x^2 - x \cdot senx - cosx$, función continua en $\mathbb{R}$ por ser suma y resta de continuas.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [-\pi,0] \\ f(-\pi) = \pi^2 + 1 > 0 \\ f(0) = -1 < 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_1 \in (-\pi, 0)\ tal\ que\ f(c_1) = 0 \Leftrightarrow {c_1}^2 - c_1 senc_1 - cosc_1 = 0$$

$Es\ decir, {c_1}^2 = c_1 senc_1 + cosc_1$. Así, c_1 es raíz de la ecuación $x^2 = x \cdot senx + cosx$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [0,\pi] \\ f(0) = -1 < 0 \\ f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_2 \in (0, \pi)\ tal\ que\ f(c_2) = 0 \Leftrightarrow {c_2}^2 - c_2 senc_2 - cosc_2 = 0$$

$Es\ decir, {c_2}^2 = c_2 senc_2 + cosc_2$. Así, c_2 es raíz de la ecuación $x^2 = x \cdot senx + cosx$.

Veamos que la ecuación no tiene más soluciones:
Supongamos que c_3 fuese otra raíz de la ecuación; así ${c_3}^2 = c_3 senc_3 + cosc_3$. $y\ f(c_3) = 0$
Supongamos, sin pérdida de generalidad que $c_1 < c_2 < c_3$

Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo (c_1, c_2) se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [c_1, c_2] \\ f(x)\ derivable\ en\ (c_1, c_2) \\ f(c_1) = f(c_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_1 \in (c_1, c_2)\ tal\ que\ f'(x_1) = 0$$

Análogamente, aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo (c_2, c_3) se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [c_2, c_3] \\ f(x)\ derivable\ en\ (c_2, c_3) \\ f(c_2) = f(c_3) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_2 \in (c_2, c_3)\ tal\ que\ f'(x_2) = 0$$

es decir, encontramos dos puntos $x_1\ y\ x_2$ dentro del intervalo $[-\pi, \pi]$ de derivada nula,

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0$$

Sin embargo, $f'(x) = 2x - (senx + xcosx) + senx = x(2 - cosx)$ y

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2 - cosx) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ porque } cosx \neq 2$$

Solo hay un valor, $x = 0$, que anula la derivada de $f(x)$ lo que contradice la existencia de dos valores $x_1\ y\ x_2$ con derivada nula en $[-\pi, \pi]$. La contradicción viene de suponer la existencia de una tercera raíz c_3. Por tanto, la ecuación $x^2 = x \cdot senx + cosx$ tiene exactamente dos raíces $c_1\ y\ c_2$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

37º) Demuestra que la ecuación $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = 1$ tiene una única raíz positiva.

Resolución

Sea $f(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$, función continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [0,1] \\ f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 6 > 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_1 \in (0, 1)\ tal\ que\ f(c_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow {c_1}^7 + {c_1}^6 + {c_1}^5 + {c_1}^4 + {c_1}^3 + {c_1}^2 + c_1 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow {c_1}^7 + {c_1}^6 + {c_1}^5 + {c_1}^4 + {c_1}^3 + {c_1}^2 + c_1 = 1$$

Así, c_1 es raíz positiva de la ecuación $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = 1$

Veamos que la ecuación no tiene más soluciones positivas:
Supongamos que c_2 fuese otra raíz positiva de la ecuación y $c_1 < c_2$:

$${c_2}^7 + {c_2}^6 + {c_2}^5 + {c_2}^4 + {c_2}^3 + {c_2}^2 + c_2 = 1 \quad y\ f(c_2) = 0$$

Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo (c_1, c_2) se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [c_1,c_2] \\ f(x)\ derivable\ en\ (c_1,c_2) \\ f(c_1)=f(c_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_1 \in (c_1,c_2)\ tal\ que\ f'(x_1)=0$$

Sin embargo, $f'(x)=7x^6+6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1>0$ no tiene solución real positiva (sus coeficientes son positivos), es decir no hay puntos de derivada nula, lo que contradice la existencia de $x_1 \in (c_1,c_2)$ y, por tanto, positivo tal que $f'(x_1)=0$. La contradicción viene de suponer la existencia de una segunda raíz positiva c_2 de la ecuación. En consecuencia,

la ecuación $x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x=1$ solo tiene una raíz positiva c_1, dentro de $(0,1)$.

38º) Demostrar que la función $f(x)=x\cdot(1+senx)$ toma el valor 2.

Resolución

Sea $g(x)=x\cdot(1+senx)-2$ función es continua en $\mathbb{R}$ por ser producto, suma y resta de continuas.

$$\left.\begin{array}{r} g(x)\ continua\ en\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ g(0)=-2<0 \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi-2>0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_1 \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\ tal\ que\ g(c_1)=0 \Leftrightarrow c_1\cdot(1+senc_1)-2=0$$

$$\Leftrightarrow c_1\cdot(1+senc_1)=2 \Leftrightarrow f(c_1)=2\ y\ la\ función\ f(x)\ toma\ el\ valor\ 2\ en\ c_1$$

39º) Demuestra que la ecuación $\frac{x^2}{2}-ln(x-1)^2=\frac{5}{2}$ tiene una única solución en el intervalo $(2,1+e)$.

Resolución

Sea $f(x)=\frac{x^2}{2}-ln(x-1)^2-\frac{5}{2}$, función continua en $\mathbb{R}$ por ser suma y resta de continuas.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [2,1+e] \\ f(2)=-\dfrac{1}{2}<0 \\ f(1+e)=\dfrac{(1+e)^2}{2}-2-\dfrac{5}{2}>0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_1 \in (2,1+e)\ tal\ que\ f(c_1)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{{c_1}^2}{2}-ln(c_1-1)^2-\frac{5}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{{c_1}^2}{2}-ln(c_1-1)^2=\frac{5}{2}$$

Así, c_1 es raíz de la ecuación $\frac{x^2}{2}-ln(x-1)^2=\frac{5}{2}$

Veamos que la ecuación no tiene más soluciones en el intervalo $(2,1+e)$:

Supongamos que c_2 fuese otra raíz de la ecuación y $c_1<c_2$:

Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo (c_1,c_2) se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [c_1,c_2] \\ f(x)\ derivable\ en\ (c_1,c_2) \\ f(c_1)=f(c_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_1 \in (c_1,c_2)\ tal\ que\ f'(x_1)=0$$

Sin embargo, la derivada $f'(x)=x-\frac{2}{x-1}$ y $x-\frac{2}{x-1}=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$ cuyas soluciones $x=-1\ y\ x=2$ no están en el intervalo $(2,1+e)$, es decir no hay puntos de derivada nula, lo que contradice la existencia de $x_1 \in (c_1,c_2)$ tal que $f'(x_1)=0$. La contradicción viene de suponer la existencia de una segunda raíz c_2 de la ecuación. En consecuencia,

la ecuación $\frac{x^2}{2}-ln(x-1)^2=\frac{5}{2}$ solo tiene una raíz c_1 en el intervalo $(2,1+e)$.