1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x-1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$ **se pide:**

a) Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ **para los cuales** A **tiene inversa.**

b) Para $x = -1$**, calcular la inversa de** A.

c) Para $x = 1$**, hallar** $(A \cdot B^t)^3$ **y** $(A \cdot B^t)^{2020}$ **(donde** B^t **denota la matriz traspuesta de** B**)**

Resolución

a) $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x-1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ x+1 & 3 \end{vmatrix} = x^2 - 4$

$$\nexists A^{-1} \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$\textit{Existe inversa de } A \ \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 2\}$$

b) $x = -1$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $|A| = -3$

$A_{11} = 0\,; A_{12} = -3\,; A_{13} = 0\,; A_{21} = -3\,;\ A_{22} = 0\ ;\ A_{23} = 0\,;\ A_{31} = -2\ ; A_{32} = -1\ ;\ A_{33} = -1$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $x = 1$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $(A \cdot B^t)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $(A \cdot B^t)^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

Las sucesivas potencias de $A \cdot B^t$ son:

$$A \cdot B^t, (A \cdot B^t)^2, -I, -A \cdot B^t, -(A \cdot B^t)^2, I, \dots ..$$

Se repiten en bloques de 6; así, al dividir 2020 entre 6 se obtiene resto 4, con lo que

$$(A \cdot B^t)^{2020} = (A \cdot B^t)^4 = -A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2º) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix}$ **Determina el valor de** a **para que:**

a) El sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **tenga infinitas soluciones y determínalas.**

b) $A = A^{-1}$

Resolución

a) Al tratarse de un sistema homogéneo con 3 incógnitas, tendrá infinitas soluciones si y solo si $rg(A) < 3$ y, por tanto, $|A| = 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{vmatrix} \overset{C_3+C_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & -3 & a-3 \\ a-1 & -3 & a-3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & a-3 \\ a-1 & a-3 \end{vmatrix} = 3-a$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow 3 - a = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$

Sistema equivalente:

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

b) $A = A^{-1} \Leftrightarrow A^2 = I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2-4a & 9-2a & a^2-4a \\ a^2-4a & 8-2a & a^2-4a+1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2-4a & 9-2a & a^2-4a \\ a^2-4a & 8-2a & a^2-4a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4a = 0 \\ 9 - 2a = 1 \\ 8 - 2a = 0 \\ a^2 - 4a + 1 = 1 \end{cases}$$

cuya solución es $a = 4$

3º) Un autobús transporta 60 viajeros de tres tipos. Hay viajeros que pagan el billete entero, que vale 1,2 euros. Otro grupo de viajeros abona el 80% y un tercer grupo abola el 50%. La recaudación del autobús fue de 44,88 euros.
Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de los viajeros con mayor descuento es el doble que el número del resto de viajeros.

Resolución

Sean

$x \equiv$ *número de viajeros que pagan el billete entero, esto es,* 1,2 *euros.*
$y \equiv$ *número de viajeros que pagan el* 80% *del billete, esto es,* 0,96 *euros* .
$x \equiv$ *número de viajeros que pagan el* 50% *del billete, esto es,* 0,6 *euros* .

El sistema de ecuaciones lineales que resuelve el problema es:

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ 1{,}2x + 0{,}96y + 0{,}6z = 44{,}88 \\ z = 2(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 60 \\ 120x + 96y + 60z = 4488 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

Multiplicando por 2 la primera ecuación y restando, miembro a miembro, con la tercera:

$$3z = 120 \Longrightarrow z = 40$$

Sustituyendo $z = 40$ en el sistema y:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 60x + 48y = 1044 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -48x - 48y = -960 \\ 60x + 48y = 1044 \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro ambas ecuaciones:

$$12x = 84 \Leftrightarrow x = 7$$
$$y = 20 - x = 20 - 7 = 13$$

7 viajeros abonan el billete entero, 13 abonan el 80% y 40 abonan la mitad

4º) Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real m:

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ -2x - (m+1)y + z = -1 \\ x + (2m-1)y + (m+2)z = 2+2m \end{cases}$$

a) Discútase para los diferentes valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$. (2 puntos)

b) Resuélvase para $m = 1$. (1 punto)

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m+1) & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 & 1 \\ -2 & -(m+1) & 1 & -1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 & 2+2m \end{pmatrix}$

$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m+1) & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{vmatrix} == -(m+1)\cdot(m+2) + m + 2m\cdot(m+2) + 1 - 2m = m^2 - 1$

$|A| = 0 \iff m = \pm 1$

Caso 1 $\forall m \in \mathbb{R}\ m \neq \pm 1,\ |A| \neq 0$. Por tanto $rg(A) = 3 = rg(A^*) = nº\ incógnitas$

$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$

Caso 2 $m = 1$. En este caso $|A| = 0\ y\ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$, $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Por tanto $rg(A^*) = 2$.

$2 = rg(A) = rg(A^*) < 3$: $Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

Caso 2 $m = -1$. En este caso $|A| = 0\ y\ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$, $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Por tanto $rg(A^*) = 3$.

$2 = rg(A) \neq rg(A^*) = 3$: $Sistema\ Incompatible\ (No\ tiene\ solución)$

b) Resolvemos para $m = 1$

Sistema equivalente: $\begin{cases} x + y = 1 \\ -2x - 2y + z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$