1º) Sea $A = I - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1/4 & 3/2 \end{pmatrix}$ donde I es la matriz unidad. Se pide:

a) Comprueba que A^2 es proporcional a A .
b) Deduce la expresión general de A^n para cualquier natural n.

Resolución

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot A$

$$A^2 = \frac{1}{2} \cdot A \ \Longrightarrow A^2 \ es\ proporcional\ a\ A$$

b) $A^2 = \frac{1}{2} \cdot A$; $A^3 = A^2 \cdot A = \frac{1}{2} \cdot A \cdot A = \frac{1}{2} \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot A = \frac{1}{4} \cdot A$

Del mismo modo $A^4 = A^3 \cdot A = \frac{1}{4} \cdot A \cdot A = \frac{1}{4} \cdot A^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot A = \frac{1}{8} \cdot A$

Reiterando el proceso $A^n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{n-1}} & -\frac{1}{2^{n-2}} \\ \frac{1}{2^{n+1}} & -\frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$

2º) Sea $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $|A| = (a-b)^3$

b) Calcula razonadamente el valor de $|-2A|$

Resolución

a) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_3-C_1}{\overset{C_2-C_1}{=}} \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & b-a & 2(b-a) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ b-a & 2(b-a) \end{vmatrix} =$

$=2a(b-a)(b-a) - (b^2-a^2)(b-a) = (b-a)^2(2a-b-a) = (b-a)^2(a-b) = (a-b)^3$

b) $|-2A| = \begin{vmatrix} -2a^2 & -2ab & -2b^2 \\ -2\cdot 2a & -2(a+b) & -2\cdot 2b \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \overset{[1]}{=} (-2)^3(a-b)^3 = -8(a-b)^3 = 8(b-a)^3$

[1] porque el factor -2 multiplica a los elementos de cada fila (columna) del determinante, por lo que, al tener 3 filas (columnas), éste queda multiplicado por dicho número al cubo.

3º) Resuelve la ecuación matricial $AX + B = 2A$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Resolución

$$AX + B = 2A \iff AX = 2A - B \iff X = A^{-1}(2A - B)$$

Inversa de A:

$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$;

$A_{11} = 1$; $A_{12} = 0$; $A_{13} = 2$; $A_{21} = 0$; $A_{22} = 1$; $A_{23} = -1$; $A_{31} = -1$; $A_{32} = 0$; $A_{33} = -1$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\2&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$2A-B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\8&-5&-4\\-12&8&5\end{pmatrix}$$

La solución es: $X=A^{-1}(2A-B)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\2&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\8&-5&-4\\-12&8&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&-9&-5\\8&-5&-4\\6&-5&-1\end{pmatrix}$

4º) Una persona invirtió 72000 euros repartidos en tres empresas A, B y C y obtuvo 5520 euros de beneficio. Calcular la inversión realizada en cada empresa sabiendo que en la empresa B hizo el triple de inversión que en la A y C juntas, y que los beneficios en las empresas fueron del 10% en la empresa A, el 8% en la B y el 5% en la C.

Resolución

a) Sean

$x\equiv cantidad\ invertida\ en\ la\ empresa\ A.$
$y\equiv cantidad\ invertida\ en\ la\ empresa\ B.$
$x\equiv cantidad\ invertida\ en\ la\ empresa\ C.$

El sistema de ecuaciones lineales que resuelve el problema es:

$$\begin{cases} x+y+z\ =72000\\ y=3(x+z)\\ 0{,}1x+0{,}08y+0{,}05z=5520\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x+y+z\ =72000\\ 3x-y+3z=0\\ 10x+8y+5z=552000\end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

Multiplicando por 3 la primera ecuación y restando con la segunda:

$$\begin{cases}3x+3y+3z=216000\\ 3x-y+3z=0\end{cases}\Longrightarrow 4y=216000\Longrightarrow y=54000$$

Sustituyendo $y=54000$ en el sistema:

$$\begin{cases}3x-54000+3z=0\\ 10x+432000+5z=552000\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+z=18000\\ 10x+5z=120000\end{cases}$$

$$z=18000-x\,;\,10x+5(18000-x)=120000\,;\,5x=30000\,;\ x=6000\quad;\quad z=12000$$

$Invirtió\ 6000\ euros\ en\ la\ empresa\ A, 54000\ euros\ en\ la\ empresa\ B\ y\ 12000\ en\ la\ empresa\ C$

También podemos resolver el sistema por Gauss:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&72000\\3&-1&3&0\\10&8&5&552000\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&72000\\0&-4&0&-216000\\0&-2&-5&-168000\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&72000\\0&-4&0&-216000\\0&0&-5&-60000\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x+y+z\ =72000\\ 4y=216000\\ 5z=60000\end{cases}\qquad de\ donde\ z=12000\ \ ;\ \ y=54000\ \ ;\ \ x=6000$$

5º) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases}kx+3y+z=k\\ x+ky+kz=1\\ x+y-z\ =1\end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.
b) Resuélvase para $k=2$.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} k & 3 & 1 \\ 1 & k & k \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $A^* = \begin{pmatrix} k & 3 & 1 & k \\ 1 & k & k & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Vemos el rango de la matriz A:

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 3 & 1 \\ 1 & k & k \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2-C_1 \\ C_3+C_1}}{\cong} \begin{vmatrix} k & 3-k & k+1 \\ 1 & k-1 & k+1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (k+1)(3-k+1-k) = -2(k+1)(k-2)$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow -2(k+1)(k-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 2 \end{cases}$$

Caso 1 $\forall k \in \mathbb{R}\ \ k \neq -1\,,\ k \neq 2\ ,|A| \neq 0.\ rg(A) = 3 = rg(A^*) = N^{\underline{o}}\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $k = -1$. En este caso $|A| = 0\ \ y\ \ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{Columnas \\ iguales}}{\cong} 0 \quad \text{y, por tanto, } rg(A^*) = 2$$

$$2 = rg(A) = rg(A^*) < n^{\underline{o}}\ incógnitas.\ \ Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

Caso 3 $k = 2$. En este caso $|A| = 0\ \ y\ \ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{F_1=F_2+F_3}{\cong} 0 \quad \text{y, por tanto, } rg(A^*) = 2$$

$$2 = rg(A) = rg(A^*) < n^{\underline{o}}\ incógnitas.\ \ Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

b) Resolvemos para $k = 2$.

Observando el menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$$z = t; \quad \begin{cases} 2x + 3y = 2 - t \\ x + 2y = 1 - 2t \end{cases}$$

Multiplicando por -2 la segunda ecuación y sumando miembro a miembro las ecuaciones, obtenemos

$$y = -3t \;\; ; \;\; x = 1 + 4t \;\; ; \;\; z = t$$

$$La\ solución\ viene\ dada\ por \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Puntuación

1, 2 ------------- 1,5 puntos
3, 4 ------------- 2 "
5 ---------------- 3 "