1º) Resuelve, si es posible, cada uno de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 10 \\ 3x + 3y + 3z = 12 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases}$

Solución

a) Sistema incompatible b) Sistema compatible indeterminado: $\begin{cases} x = 6 - t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

c) Sistema compatible indeterminado: $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

2º) La suma de las tres cifras de un número es 18, siendo la cifra de las decenas igual a la media de las otras dos. Si se cambia la cifra de las unidades por la de las centenas, el número aumenta en 198 unidades. Calcula dicho número.

Solución

El número buscado es 567

3º) Un alumno de 2º de Bachillerato emplea en la compra de tres lápices, un sacapuntas y dos gomas de borrar, tres euros. El doble del precio de un lápiz excede en cinco céntimos de euro a la suma de los precios de un sacapuntas y de una goma de borrar. Si cada lápiz costara cinco céntimos de euro más, entonces su precio duplicaría al de una goma de borrar. Determina el precio de un lápiz, de un sacapuntas y de una goma de borrar.

Solución

Lápiz: 0,55 € ; Sacapuntas: 0,75 € ; Goma de borrar: 0,30 €

4º) Julia, Clara y Miguel reparten hojas de propaganda. Clara reparte el 20% del total, Miguel reparte 100 hojas más que Julia. Entre Clara y Julia reparten 850 hojas.
Plantea un sistema de ecuaciones que permita saber cuántas hojas reparte cada uno. Sabiendo que la empresa paga 1 céntimo por cada hoja repartida, calcula el dinero que ha recibido cada uno de los tres.

Solución

Julia: 5,50 € ; Clara: 3 € ; Miguel: 6,50 €

5º)

a) Discute el sistema siguiente según los valores del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + (a+1)y = 1 \\ ax + 2y = -2 \end{cases}$$

b) Resuélvelo para el valor de a que lo haga indeterminado.

Solución

a) $a \neq -2$ y $a \neq 1$: sistema compatible determinado.
$a = -2$: sistema compatible indeterminado.
$a = 1$: sistema incompatible.

b) $a = -2$: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

6º) Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + 2y + az = 8 \end{cases}$$

a) Discute el sistema para los distintos valores de a.
b) Resuelve el sistema para $a = 4$.

Selectividad. Madrid.

Solución

a) $a \neq -7/4$: sistema compatible determinado
$a = -7/4$: sistema incompatible

b) $Para\ a = 4$, la solución del sistema es: $x = 1\,; y = 1\,;\ z = 1$

7º) Dado el siguiente sistema dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x \quad + y + z = 3 \\ x + ky + z = 3 \\ kx \qquad - 3z = 6 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.
b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.
c) Resuélvase el sistema para $k = 3$.

Selectividad. Madrid.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ k & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & k & 1 & 3 \\ k & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ k & 0 & -3 \end{vmatrix} =_{C_3 = C_3 - C_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ k & 0 & -3-k \end{vmatrix} = -(k+3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = -(k+3)(k-1)$$

$|A| = 0 \iff \begin{cases} k = -3 \\ k = 1 \end{cases}$

Caso 1 $\forall k \in \mathbb{R}\ \ k \neq -1\ y\ k \neq -3$. $|A| \neq 0$. Por tanto $rg(A) = 3 = rg(A^*) = nº\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $k = -3$. En este caso $|A| = 0\ \ y\ \ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

Calculemos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$, $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} =_{C_3 = C_3 + 2C_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -60 \neq 0.$$ Por tanto $rg(A^*) = 3$.

$$2 = rg(A) \neq rg(A^*) = 3:\ Sistema\ Incompatible\ (No\ tiene\ solución)$$

Caso 3 $k = 1$. En este caso $|A| = 0\ \ y\ \ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y, por tanto, $rg(A) = 2\ y\ \ rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:
Orlamos el menor que nos ha dado el rango de A, con la primera fila y cuarta columna de A^* :
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ =0 (tiene dos filas iguales). Por tanto $rg(A^*) = 2$

$rg(A) = rg(A^*) = 2 < nº\ incógnitas$: $Sistema\ Compatible\ Indeterminado\ (Infinitas\ Soluciones)$

b) Resolvemos para $k = 1$.

Observando el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x \quad - 3z = 6 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$z = t$; $\begin{cases} x + y = 3 - t \\ x \quad = 6 + 3t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, de donde $y = 3 - t - (6 + 3t) = -3 - 4t$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -3 - 4t \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

c) Resolvemos el sistema para $k = 3$: $\begin{cases} x \quad + y \quad + z = 3 \\ x + 3y \quad + z = 3 \\ 3x \qquad - 3z = 6 \end{cases}$ $|A| = -12$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Estamos en el caso 1 estudiado; por tanto, el sistema es compatible determinado, tiene una única solución. Aplicando la regla de Cramer obtenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{5}{2}\ ; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix}}{-12} = 0\ ; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{1}{2}$$

8º) Dado el siguiente sistema dependiente del parámetro k:

$$\begin{cases} kx - 2y + 7z = 8 \\ x \quad - y \ + kz = 2 \\ -x \ + y \ + z = 2 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k y resuélvase cuando sea compatible determinado.
b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.
c) Resuélvase el sistema para $k = 0$.

Selectividad. Madrid.

Resolución

a) Vamos a utilizar el método de Gauss. Transformamos la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{pmatrix} k & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & k & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[Intercambio\ F_1,F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 2 \\ k & -2 & 7 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\substack{F_2=F_2-k.F_1 \\ F_3=F_3+F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 2 \\ 0 & -2+k & 7-k^2 & 8-2k \\ 0 & 0 & 1+k & 4 \end{pmatrix}$$

El sistema escalonado es $\begin{cases} x \qquad - y \qquad + kz = 2 \\ (-2+k)y + (7-k^2)z = 8 - 2k \\ (1+k)z = 4 \end{cases}$

Caso 1 $\forall k \in \mathbb{R}$ $k \neq -1$ y $k \neq 2$ [-1 y 2 son los valores de k que anulan los coeficientes de z e y]
Sistema Compatible Determinado (solución única)
Resolviendo desde la tercera ecuación hasta la primera obtenemos:

$$z=\frac{4}{k+1};\qquad y=\frac{2(k+5)}{(k+1)}\;;\qquad x=\frac{12}{k+1}$$

Caso 2 $k=-1$

La tercera ecuación del sistema escalonado queda $0=4$. Sistema Incompatible (No tiene solución)

Caso 2 $k=2$

El sistema escalonado es $\begin{cases} x-y+2z=2 \\ 3z=4 \end{cases}$ Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

b) Solución: $z=\frac{4}{3}$; $y=t$; $x=\frac{-2}{3}+t \quad \forall t\in\mathbb{R}$

c) $k=0$: Sustituyendo en las expresiones del caso 1, la solución es $x=12$; $y=10$; $z=4$

9º] Se considera el sistema $\begin{cases} x+y+z=6 \\ -x+y+(a-4)z=7 \\ 2x+4y+2z=25 \end{cases}$

a) Discútase según los valores del parámetro real a.
b) Resuélvase cuando sea compatible indeterminado.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a-4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & a-4 & 7 \\ 2 & 4 & 2 & 25 \end{pmatrix}$

$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a-4 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}\underbrace{=}_{C_3=C_3-C_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a-3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}=(3-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=6-2a$$

$|A|=0 \iff 6-2a=0 \iff a=3$

Caso 1 $\forall a\in\mathbb{R}\ a\neq 3$. $|A|\neq 0$. Por tanto $rg(A)=3=rg(A^*)=n^{o}\ incógnitas$

$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$

Caso 2 $a=3$. En este caso $|A|=0\ y\ rg(A)<3$.

Matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 2 & 25 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A)=2$, $rg(A^*)\geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 25 \end{vmatrix}\underbrace{=}_{\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3-2F_1}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 13 \\ 0 & 2 & 13 \end{vmatrix}=0 \qquad ; \qquad \text{Por tanto } rg(A^*)=2$$

$rg(A)=rg(A^*)=2<n^{o}\ incógnitas$: Sistema Compatible Indeterminado.

b) Resolvemos para $a=3$.

Observando el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} x+y+z=6 \\ -x+y-z=7 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$z = t$; $\begin{cases} x + y = 6 - t \\ -x + y = 7 + t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, de donde $y = \frac{13}{2}$ y $x = \frac{-1}{2} - t$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = \frac{-1}{2} - t \\ y = \frac{13}{2} \\ z = t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

10º) Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + ay - 7z = 4a - 1 \\ x + (1 + a)y - (a + 6)z = 3a + 1 \\ ay - 6z = 3a - 2 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.
b) Resuélvase el sistema en el caso en el que tiene infinitas soluciones.
c) Resuélvase el sistema en el caso $a = -3$.

Selectividad. Madrid.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -7 \\ 1 & 1+a & -a-6 \\ 0 & a & -6 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & a & -7 & 4a-1 \\ 1 & 1+a & -a-6 & 3a+1 \\ 0 & a & -6 & 3a-2 \end{pmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & -7 \\ 1 & 1+a & -a-6 \\ 0 & a & -6 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{F_2=F_2F_1} \begin{vmatrix} 1 & a & -7 \\ 0 & 1 & 1-a \\ 0 & a & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1-a \\ a & -6 \end{vmatrix} = a^2 - a - 6$$

$|A| = 0 \iff a^2 - a - 6 = 0 \iff \begin{cases} a = -2 \\ a = 3 \end{cases}$

Caso 1 $\forall a \in \mathbb{R}$ $a \neq -2$ y $a \neq 3$. $|A| \neq 0$. Por tanto $rg(A) = 3 = rg(A^*) = nº\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $a = -2$. En este caso $|A| = 0$ y $rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 & -9 \\ 1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{pmatrix}$

Calculemos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$, $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la primera fila y cuarta columna de A^* :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -9 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{F_2=F_2-F_1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 0.$$ Por tanto $rg(A^*) = 2$.

$rg(A) = rg(A^*) = 2 < nº\ incógnitas.$: Sistema Compatible Indeterminado.

Caso 3 $a = 3$. En este caso $|A| = 0$ y $rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 1 & 4 & -9 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 11 \\ 1 & 4 & -9 & 10 \\ 0 & 3 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

Calculemos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$, $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{F_2=F_2-F_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 10 \neq 0. \text{ Por tanto } rg(A^*) = 3.$$

$2 = rg(A) \neq rg(A^*) = 3$: Sistema Incompatible (No tiene solución).

b) Resolvemos el caso en el que el sistema tiene infinitas soluciones, esto es, para $a = -2$.

En este caso, hemos visto (caso 2) que el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ nos ha dado el rango de la matriz A y, por tanto, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} x - y - 4z = -5 \\ -2y - 6z = -8 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$z = t$; $\begin{cases} x - y = -5 + 4t \\ -2y = -8 + 6t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, de donde $y = 4 - 3t$ y $x = -1 + t$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 - 3t \\ z = t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

c) Resolvemos el sistema para $a = -3$

$$\begin{cases} x - 3y - 7z = -13 \\ x - 2y - 3z = -8 \\ -3y - 6z = -11 \end{cases}$$

Este valor del parámetro a corresponde al caso 1 y, por tanto, el sistema es Compatible Determinado.
Lo podemos resolver fácilmente por la regla de Cramer o por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 & -13 \\ 1 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[F_2=F_2-F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 & -13 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[F_3=F_3+3F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 & -13 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

El sistema escalonado es $\begin{cases} x - 3y - 7z = -13 \\ y + 4z = 5 \\ 6z = 4 \end{cases}$

Resolviendo, de abajo hacia arriba, se obtiene la solución: $z = \frac{2}{3}$; $y = \frac{7}{3}$; $x = \frac{-4}{3}$

11º) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependiente del parámetro real k

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + ky + 2z = 5 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.
b) Resuélvase el sistema para $k = 0$.
c) Resuélvase el sistema para $k = 2$.

Selectividad. Madrid.

Solución

a) $\forall k \in \mathbb{R}$ $k \neq -2$ y $k \neq 3, S.C.D$ $\quad k = 1, S.I$ $\quad k = 2, S.C.I$

b) $x = 1$; $y = -1$; $z = 2$

c) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

12º) Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ ay + z = 1 \\ ax + y + az = a \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.
b) Resuélvase el sistema en el caso en el que tenga infinitas soluciones.
c) Resuélvase el sistema para $a = 3$.
Selectividad. Madrid.

13º) Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x - y + kz = 1 \\ 2x - ky + z = 2 \\ x - y - z = k - 1 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.
b) Resuélvase el sistema para el valor de k para el cual el sistema tiene infinitas soluciones.
c) Resuélvase el sistema para $k = 3$.
Selectividad. Madrid.

14º) Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ -4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 7a \end{pmatrix}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del parámetro real a.
b) Resuélvase el sistema para el valor de a para el cual el sistema tiene infinitas soluciones.
c) Resuélvase el sistema para $a = 0$.
Selectividad. Madrid.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & a \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 22 \\ 1 & -4 & a & 7a \end{pmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & a \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{C_3 = C_3 + C_1 \\ C_2 = C_2 - C_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & -5 & a+1 \end{vmatrix} = -5(a+1) + 20 = -5a + 15$$

$|A| = 0 \iff a = 3$

Caso 1 $\forall\, a \in \mathbb{R}\ a \neq 3$. $|A| \neq 0$. Por tanto $rg(A) = 3 = rg(A^*) = nº\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $a = 3$. En este caso $|A| = 0$ y $rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 22 \\ 1 & -4 & 3 & 21 \end{pmatrix}$

Calculemos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$, $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 22 \\ 1 & -4 & 21 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{C_2 = C_2 - C_1 \\ C_3 = C_3 - C_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 20 \\ 1 & -5 & 20 \end{vmatrix} = 0;\ \text{Por tanto } rg(A^*) = 2$$

$$rg(A) = rg(A^*) = 2 < 3: \ Sistema\ compatible\ indeterminado \text{ (infinitas soluciones)}$$

b) $a = 3$: A partir del caso 2 del apartado anterior obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 22 \end{cases}$$

$z = t$; $\begin{cases} x + y = 1 + t \\ 2x - 3y = 22 - 2t \end{cases}$ de donde $x = 5 + \frac{t}{5}$; $y = -4 + \frac{4t}{5}$; $z = t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

c) $a = 0$: Matriz de coeficientes de las incógnitas del sistema: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Como $|A| = 0$ para $a = 3$, sabemos que $|A| \neq 0$ y, por tanto, $rg(A) = 3 = rg(A^*)$. El sistema es compatible determinado (solución única).
Resolviendo por Cramer o por Gauss se tiene la solución $x = \frac{32}{5}$; $y = \frac{8}{5}$; $z = 7$

15º) Indica para qué valores de a **tiene solución única el siguiente sistema** $\begin{cases} x - y + az = 0 \\ y + az = 1 \\ x + ay - z = -2 \end{cases}$ **y resolverlo para** a = 2.

Solución

$\forall\ a \in \mathbb{R}\ a \neq -1$

$a = 2$: $x = -\frac{11}{9}$; $y = -\frac{1}{9}$; $z = \frac{5}{9}$

16º) Estudiar el siguiente sistema lineal, según los diferentes valores del parámetro real a. En los casos en que sea compatible, resolverlo.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

17º) Se considera el sistema lineal $\begin{cases} \lambda x + y - z = 0 \\ -\lambda x + (\lambda - 1)y = 0 \\ -x - 2y + (\lambda + 1)z = 0 \end{cases}$

Determina los valores de λ para los que tiene solución distinta de la trivial $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ **y obténgase la solución para uno de los valores de λ.**

Resolución

Al tratarse de un sistema homogéneo solamente consideramos la matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -\lambda & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & -2 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$

Un sistema homogéneo siempre tiene la solución trivial $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; por tanto, para que el sistema pueda tener soluciones distintas de la trivial, debemos encontrar los valores de λ que lo hagan compatible indeterminado, esto es, que anulen el determinante de la matriz A para que $rg(A) < 3$.
Calculamos el determinante de la matriz A:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -\lambda & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{F_3 = F_3 + (\lambda+1)F_1} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -\lambda & \lambda - 1 & 0 \\ \lambda^2 + \lambda - 1 & \lambda - 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -\lambda & \lambda - 1 \\ \lambda^2 + \lambda - 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1 - \lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \lambda^2 + \lambda - 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda - 1)$$

$$|A| = 0 \iff = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda - 1) = 0 \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 - \sqrt{2} \\ \lambda = -1 + \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{que son los valores que buscamos.}$$

Encontremos ahora la solución del sistema $\begin{cases} \lambda x & +y & & -z & =0 \\ -\lambda x+(\lambda-1)y & & & & =0 \\ -x & -2y & & +(\lambda+1)z & =0 \end{cases}$ para $\lambda=1$

La matriz del sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ y el sistema $\begin{cases} x & +y & -z=0 \\ -x & & =0 \\ -x & -2y & +2z=0 \end{cases}$

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1$ es no nulo, tenemos que $rg(A)=2$ y el sistema equivalente es

$\begin{cases} x+y-z=0 \\ -x \qquad =0 \end{cases}$ de donde $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

18º) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} & y & +z & =1 \\ (\lambda-1)x & +y & +z & =\lambda \\ x & +(\lambda-1)y & -z & =0 \end{cases}$

a) Discutirlo según los valores del parámetro λ.
b) Resolverlo para $\lambda=0$.

Solución

a) $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}-\{0,1\}\ S.C.D$; $\lambda=0\ S.C.I$; $\lambda=1\ S.C.I$

b) Para $\lambda=0$ la solución es $\begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=t \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

19º) Un estadio de fútbol con capacidad para 72000 espectadores está lleno durante la celebración de un partido entre los equipos A y B. Unos espectadores son socios del equipo A, otros lo son del equipo B, y el resto no son socios de ninguno de los equipos que están jugando. A través de la venta de localidades sabemos lo siguiente:
(a) No hay espectadores que sean socios de ambos equipos simultáneamente.
(b) Por cada 13 socios de alguno de los dos equipos hay 3 espectadores que no son socios.
(c) Los socios del equipo B superan en 6500 a los socios del equipo A.
¿Cuántos socios de cada equipo hay en el estadio viendo el partido?

Selectividad. Madrid.

Resolución

$x \equiv número\ de\ espectadores\ socios\ del\ equipo\ A$
$y \equiv número\ de\ espectadores\ socios\ del\ equipo\ B$
$z \equiv\ número\ de\ espectadores\ que\ no\ son\ socios\ de\ ningún\ equipo$

Del enunciado (a): $x+y+z=72000$

Del enunciado (b): $\frac{x+y}{13}=\frac{z}{3}$

Del enunciado (c): $y=x+6500$

El sistema de ecuaciones correspondiente es $\begin{cases} x & +y & +z=72000 \\ 3x+3y-13z=0 \\ -x & +y & =6500 \end{cases}$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 72000 \\ 3 & 3 & -13 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 6500 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[F_3=F_3+F_1]{F_2=F_2-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 72000 \\ 0 & 0 & -16 & -216000 \\ 0 & 2 & 1 & 78500 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{Intercambio\ F_2, F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 72000 \\ 0 & 2 & 1 & 78500 \\ 0 & 0 & -16 & -216000 \end{pmatrix}$$

El sistema escalonado es $\begin{cases} x & +y & +z=72000 \\ & 2y & +z=78500 \\ & & -16z=-216000 \end{cases}$ de donde obtenemos la solución

$$z=13500\ ;\ \ y=32500\ ;\ \ x=26000$$

Hay 26000 socios del equipo A, 32500 socios del equipo B y 13500 personas no socios.

20º) Una empresa instala casas prefabricadas de tres tipos A, B y C. Cada casa de tipo A necesita 10 horas de albañilería, 2 de fontanería y 2 de electricista. Cada casa de tipo B necesita 15 horas de albañilería, 4 de fontanería y 3 de electricista. Cada casa de tipo C necesita 20 horas de albañilería, 6 de fontanería y 5 de electricista. La empresa emplea exactamente 270 horas de trabajo al mes de albañilería, 68 de fontanería y 58 de electricista. ¿Cuántas casas de cada tipo instala la empresa en un mes?

Selectividad: Madrid

Resolución

$x \equiv$ *número de casas de tipo A*
$y \equiv$ *número de casas de tipo B*
$z \equiv$ *número de casas de tipo C*

A partir del enunciado construimos la tabla siguiente:

	Casa tipo A	Casa tipo B	Casa tipo C	Total horas
Albañilería	10	15	20	270
Fontanería	2	4	6	68
Electricista	2	3	5	58

El sistema de ecuaciones lineales es $\begin{cases} 10x + 15y + 20z = 270 \\ 2x + 4y + 6z = 68 \\ 2x + 3y + 5z = 58 \end{cases}$ que podemos simplificar

$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 54 \\ x + 2y + 3z = 34 \\ 2x + 3y + 5z = 58 \end{cases}$ Resolviendo este sistema se obtiene $x = 10 \ ; \ y = 6 \ ; \ z = 4$

Por tanto, en un mes, la empresa instala 10 casas tipo A, 6 casas tipo B y 4 casas tipo C.

21º) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 4y + 3z = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + ky + 2z = 1 \end{cases}$$

Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

Resolución

La matriz A del sistema a lo sumo tiene rango 3 porque su dimensión es $4x3$.

Sea A^* la matriz ampliada del sistema (de orden 4).

$$|A^*| = 12 - 4k; \quad |A^*| = 0 \iff k = 3$$

Caso 1 $\forall\, k \in \mathbb{R}\ \ k \neq 3$. Se tiene $|A^*| \neq 0$ y, por tanto $rg(A^*) = 4 \neq rg(A)$. Sistema incompatible.

Caso 2 $k = 3$. Sistema Compatible Determinado. Solución única: $x = -\frac{3}{5} \ ; \ y = \frac{4}{5} \ ; \ z = \frac{2}{5}$

22º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese A^{-1}

b) Resuélvase el sistema de ecuaciones dado por $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Selectividad. Madrid.

Solución

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por tanto, la solución del sistema de ecuaciones es $x = 1 \;\; ; \;\; y = -1 \;\; ; \;\; z = 1$

23º) Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a **:**

$$\begin{cases} ax - 2y = 0 \\ 3x - y - z = -1 \\ x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Resuélvase para $a = 1$.

Selectividad. Madrid.

24º) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro k **:**

$$\begin{cases} kx + y = 0 \\ x + ky - 2z = 1 \\ kx - 3y + kz = 0 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b) Resuélvase el sistema para $k = 1$.

Selectividad. Madrid.

25º) Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a-2 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 2(a+1) & a+1 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\; ; \;\; O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense los valores de a **para los cuales no existe la matriz inversa** A^{-1}.

b) Para $a = -1$ **, calcúlese** A^{-1}

c) Para $a = 0$ **, calcúlense todas las soluciones del sistema lineal** $AX = O$.

Selectividad. Madrid.

Resolución

a) La matriz inversa de A no existe para aquellos valores que anulan su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} a-2 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 2(a+1) & a+1 \end{vmatrix} = a^3 - 3a^2 + 2a$$

$|A| = 0 \iff a^3 - 3a^2 + 2a = 0 \iff a(a^2 - 3a + 2) = 0 \iff \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$ valores de a para los que $\nexists A^{-1}$

b) $a = -1$: $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/6 \end{pmatrix}$

c) $a = 0$: A$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $|A| = 0$ y el rango de A vale 2 al ser $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$

El sistema equivalente es $\begin{cases} 2x \quad + 2z = 0 \\ \quad 2y + z = 0 \end{cases}$ cuya solución es $x = -t \;\; ; \;\; y = -\frac{t}{2} \;\; ; \;\; z = t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

26º) Un agricultor tiene repartidas sus 10 hectáreas de terreno en barbecho, cultivo de trigo y cultivo de cebada. La superficie dedicada al trigo ocupa 2 hectáreas más que la dedicada a la cebada, mientras que en barbecho tiene 6 hectáreas menos que la superficie total dedicada al cultivo de trigo y cebada. ¿Cuántas hectáreas tiene dedicadas a cada uno de los cultivos y cuántas están en barbecho?

Selectividad. Madrid.

Solución

Tiene que dedicar 2 hectáreas a barbecho, 5 hectáreas a trigo y 3 hectáreas a cebada.

27º) Una empresa desea disponer de dinero en efectivo en euros, dólares y libras esterlinas. El valor total entre las tres monedas ha de ser igual a 264000 euros. Se quiere el valor del dinero en libras esterlinas sea la décima parte del valor del dinero en euros y que el valor del dinero disponible en euros sea el doble del valor del dinero en dólares. Si se supone que una libra esterlina es igual a 1,5 euros y un dólar es igual a 1,1 euros, se pide determinar la cantidad de euros, dólares y libras esterlinas que la empresa ha de tener disponible.

Solución

$165000\ \ euros, 75000\ dólares\ y\ 11000\ libras$

28º) Un hipermercado inicia una campaña de ofertas. En la primera de ellas descuenta un 4% en un cierto producto A, un 6% en el producto B y un 5% en el producto C. A las dos semanas pone en marcha la segunda oferta descontando un 8% sobre el precio inicial de A, un 10% sobre el precio inicial de B y un 6% sobre el precio inicial de C.
Se sabe que, si un cliente compra durante la primera oferta un producto A, dos B y tres C, se ahorra 16 euros respecto del precio inicial. Si compra tres productos A, uno B y cinco C en la segunda oferta, el ahorro es de 29 euros. Si compra un producto A, uno B y uno C, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 euros.
Calcúlese el precio de cada producto antes de las ofertas.

Solución

A: 25 € ; B: 50 € ; C: 60 €

29º) A un florista le han encargado preparar 5 **ramos iguales para** 5 **eventos. El precio total acordado es de** 610 **euros. Ha decidido emplear rosas, tulipanes y lilas. Cada ramo llevará un total de** 24 **flores y el número de rosas empleado doblará al número de flores de otras especies. ¿Cuál es número de flores de cada tipo que usará en cada ramo sabiendo que cada rosa cuesta** 6 **euros, cada tulipán cuesta** 4 **y cada lila** 3**?**

EvAU Modelo 2016-2017

Solución

$16\ rosas, 2\ tulipanes\ y\ 6\ lilas$

30º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese $(A^tB)^{-1}$ **donde** A^t **denota la matriz traspuesta de** A.

b) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Selectividad. Madrid.

Solución

a) $(A^tB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $x = 1\ ;\ \ y = -2$

31º) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a**:**

$$\begin{cases} x + y + az = 2 \\ 3x + 4y + 2z = a \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a**.**

b) Resuélvase el sistema en el caso $a = 1$.

Selectividad. Madrid.

32º) Considérese el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real λ

$$\begin{cases} 2x - \lambda y + z = -\lambda \\ 4x - 2\lambda y + 2z = \lambda - 3 \end{cases}$$

a) Determínense los valores del parámetro real λ **que hacen que el sistema sea incompatible.**

b) Resuélvase el sistema para $\lambda = 1$**.**

Selectividad. Madrid.

33º) Se considera el sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Discutirlo según los valores del parámetro real λ.
b) Resolverlo para $\lambda = -3$.
c) Resolverlo para $\lambda = 1$.

Solución

$\lambda \neq -3 \quad \lambda \neq -3 \quad S.I$

$\lambda = -3 \quad SCD \quad x = y = z = 1$

$\lambda = 1 \ \ SCI \ \begin{cases} x = & 1 - t - s \\ y = & t \\ z = & s \end{cases} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$

34º) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ se pide:

a) Calcular el valor o valores de λ que hacen nulo el determinante de la matriz $M - \lambda \cdot I$.
b) Para $\lambda = -1$, resolver el sistema de ecuaciones lineales $(M - \lambda I) \cdot \mathrm{X} = 0$ siendo O la matriz nula $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución

$a)\ \lambda = -1\ ;\ \lambda = 3$

b) $\begin{cases} x = & t \\ y = & -t \\ z = 0 \end{cases}$