Variable aleatoria continua: Distribución normal

1º) Usando las tablas de la normal, calcula las siguientes áreas:

a) Área entre 0 **y** $0{,}25$ **b) Área desde** $-\infty$ **hasta** $1{,}32$ **c) Área entre** $-2{,}23$ **y** $1{,}15$

2º) Sea Z **una variable aleatoria** $N\ (0{,}1)$**. Calcula:**

$a)\ p(Z\ \geq\ 1{,}32)$ $b)\ p(Z\ \leq\ 2{,}17)$ $c)\ p(1{,}52\ <\ Z\ \leq\ 2{,}03)$

$d)\ p(Z\ \geq\ -1{,}32)$ $e)\ p(Z\ \leq\ -2{,}17)$ $f)\ p(-2{,}03\ <\ Z\ \leq\ -1{,}52)$

3º) La duración media de un lavavajillas es de 15 años con una desviación típica igual a 0,5 años. Si la vida útil del electrodoméstico se distribuye normalmente, hallar la probabilidad de que al comprar un lavavajillas nos dure más de 16 años. [**Sol**: 0,228]

4º) Las precipitaciones anuales en una región son de 2.000 ml/m² de media con desviación típica de 300 ml/m². Suponiendo que las precipitaciones se distribuyen normalmente, calcula la probabilidad de que en un año determinado la lluvia no supere los 1.200 ml/m².

Resolución

$X =$ "*Precipitaciones anuales en una región*"

Media: $\mu = 2000$; Desviación típica: $\sigma = 300$

$X \sim N(2000{,}300)\ ;\ Z \sim N(0,1)$

$$p(X < 1200) =^{Tificamos}= p\left(Z < \frac{1200 - 2000}{300}\right) = p(Z < -2{,}67) = p(Z > 2{,}67) = 1 - p(Z \leq 2{,}67) =$$

$= 1 - 0{,}9962 = 0{,}0038.$

5º) Las tallas de 800 recién nacidos se distribuyen normalmente con una media de 66 cm. y una desviación típica de 5 cm. Calcula cuántos recién nacidos cabe esperar con tallas comprendidas entre 65 y 70 cm. [**Sol**: $p = 0{,}3674$; 293 *recién nacidos*]

6º) Los ingresos diarios de una empresa siguen una distribución normal de media 35.560 € y desviación típica 2.530 €. Justifica si es razonable o no el esperar obtener un día ventas superiores a 55.000 €. Calcula cuántos días a lo largo de un año se esperan obtener unas ventas superiores a 40.620 €.

Resolución

$X =$ "*Ingresos de una empresa*"

Media: $\mu = 35560$; Desviación típica: $\sigma = 2530$

$X \sim N(35560{,}2530)\ ;\ Z \sim N(0,1)$

$$p(X > 55000) =^{Tificamos}= p\left(Z > \frac{55000 - 35560}{2530}\right) = p(Z > -0{,}67) = p(Z > 7{,}68) = 1 - p(Z \leq 7{,}687)$$

$\cong 1 - 1 = 0.$ No es razonable esperar obtener un día ventas superiores a 55000 euros por que la probabilidad de que ocurra es prácticamente nula.

Para calcular cuántos días a lo largo de un año se esperan obtener unas ventas superiores a 40.620 € procedemos así:

$$p(X > 40620) =^{Tificamos}= p\left(Z > \frac{40620 - 35560}{2530}\right) = p(Z > 2) = 1 - p(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

$\cong 1 - 1 = 0.$

$$365 \cdot 0{,}0228 = 8{,}322$$

8 días a lo largo de un año se esperan obtener unas ventas superiores a 40.620 €

7º) El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una ley $N(200, 50)$. Se extrae una al azar. Calcula la probabilidad:
a) de que su peso no exceda los 175 gramos.
b) de que su peso exceda los 230 gramos.
c) de que su peso esté comprendido entre 225 y 275 gramos.

8º) El peso de los toros de una determinada ganadería se distribuye normalmente con media de 500 kg y desviación típica de 45 kg. Si la ganadería tiene 2.000 toros, calcula:
a) el número de toros que pesan más de 540 kg.
b) el número de toros que pesan menos de 480 kg.
c) el número de toros que pesan entre 490 y 510 kg.

9º) Sea X una variable aleatoria que mide la estatura de los individuos de una población y que se distribuye según una normal de media 1,74 y desviación típica σ. Calcula la probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga una estatura inferior o igual a la media. Si la desviación típica es 0,05, calcula la probabilidad de que la estatura de un individuo elegido al azar esté comprendida entre 1,64 y 1,84. [Sol: 0,9544]

10º) En una distribución normal de media 50, la probabilidad de obtener un valor por encima de 70 es igual a 0,0228. Calcula la probabilidad de obtener valores por debajo de 45. [Sol: 0,3085]

11º) La puntuación de un test de inteligencia sigue una ley normal de media 100 y desviación típica 15. Determina el porcentaje de población que obtendría una puntuación entre 95 y 110. ¿Qué intervalo centrado en 100 contiene al 50% de la población?

Resolución

$X =$ "*Puntuación de un test de inteligencia*"
Media: $\mu = 100$; Desviación típica: $\sigma = 15$
$X \sim N(100, 15)$; $Z \sim N(0, 1)$

$$p(95 \leq X \leq 110) =^{Tificamos}= p\left(\frac{95-100}{15} \leq Z \leq \frac{110-100}{15}\right) = p(-0{,}33 \leq Z \leq 0{,}67)$$
$$= p(Z \leq 0{,}67) - p(Z < -0{,}33) = p(Z \leq 0{,}67) - p(Z > 0{,}33)$$
$$= p(Z < 0{,}67) - [1 - p(Z \leq 0{,}33] = 0{,}7486 - [1 - 0{,}6293] = 0{,}3779$$

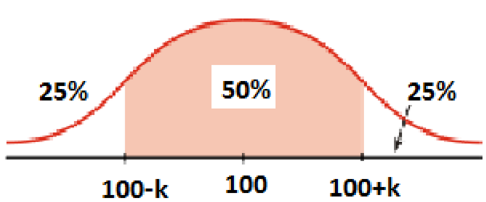
El porcentaje de población, con puntuación entre 95 y 110, es del 37,79%.

Para hallar el intervalo centrado en la media 100 que contiene al 50% de la población debemos calcula un valor $k > 0$, tal que $p(100 - k \leq X \leq 100 + k) = 0{,}5$

$$p(100-k \leq X \leq 100+k) = p\left(\frac{100-k-100}{15} \leq Z \leq \frac{100+k-100}{15}\right) = p\left(\frac{-k}{15} \leq Z \leq \frac{k}{15}\right) =$$
$$= p\left(Z \leq \frac{k}{15}\right) - p\left(Z < \frac{-k}{15}\right) = p\left(Z \leq \frac{k}{15}\right) - p\left(Z > \frac{k}{15}\right) = p\left(Z \leq \frac{k}{15}\right) - \left[1 - p\left(Z \leq \frac{k}{15}\right)\right] = 2\,p\left(Z \leq \frac{k}{15}\right) - 1.$$
$$2\,p\left(Z \leq \frac{k}{15}\right) - 1 = 0{,}5 \Rightarrow p\left(Z \leq \frac{k}{15}\right) = 0{,}75 \overset{Tabla\ N(0,1)}{\Longrightarrow} \frac{k}{15} = 0{,}675 \Rightarrow k = 10{,}125$$

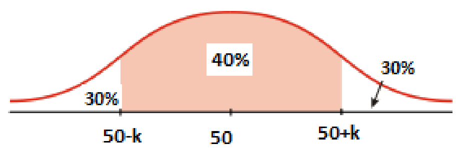
El intervalo centrado en la media 100 que contiene al 50% de la población es $(100 - 10{,}125; 100 + 10{,}125)$, esto es, $(89{,}875; 110{,}125)$.

También podíamos haber procedido de la manera siguiente para determinar k:



$$p(X \leq 100 + k) = 0{,}75 \Leftrightarrow p\left(Z \leq \frac{k}{15}\right) = 0{,}75 \Leftrightarrow$$
$$\overset{Tabla\ N(0,1)}{\Longrightarrow} \frac{k}{15} = 0{,}675 \Rightarrow k = 10{,}125$$

12º) Se ha realizado un test a un grupo de 300 personas, obteniendo una distribución normal de media 50 y desviación típica 5. Calcula:
a) el número de personas que obtienen puntuaciones mayores de 56 y el de menores de 47.
b) las puntuaciones que delimitan el 30% de la distribución.
Resolución
$X = \text{"}Puntuación\ del\ test\text{"}$
Media: $\mu = 50$; Desviación típica: $\sigma = 5$
$X \leadsto N(50, 5)$; $Z \leadsto N(0, 1)$
a) $p(X > 56) \overset{Tificamos}{=} p\left(Z > \frac{56-50}{5}\right) = p(Z > 1{,}2) = p1 - (Z \leq 1{,}2) = 1 - 0{,}8686 = 0{,}1314$
$0{,}1314 \cdot 300 = 39{,}42$
El número de personas que obtienen puntuaciones mayores de 56 es 39.
$p(X < 47) = p\left(Z < \frac{47-50}{5}\right) = p(Z < -0{,}6) = p(Z > -0{,}6) = 1 - p(Z \leq 0{,}6) = 1 - 0{,}7257 = 0{,}2743$
$0{,}2743 \cdot 300 = 82{,}29$
El número de personas que obtienen puntuaciones inferiores a 47 es 82.
b) Puntuación $50 - k$ que delimita la distribución dejando el 30% con peores puntuaciones:



$$p(X \leq 50 + k) = 0{,}7 \Leftrightarrow p\left(Z \leq \frac{k}{5}\right) = 0{,}7 \Leftrightarrow \frac{k}{5} = 0{,}525 \Leftrightarrow k = 2{,}625$$

Así, $50 - k = 50 - 2{,}625 = 47{,}375$ es la puntuación por debajo de la cual está el 30% de la población.

La puntuación $50 + k$ que delimita la distribución dejando el 30% con mejores puntuaciones es 52,625.

13º) La nota de Matemáticas en una convocatoria de Selectividad sigue una ley normal de media 6,1 y desviación típica 0,8. Se pide calcular:
a) la probabilidad de que un alumno supere el 9. [**Sol**: 0,001]
b) la probabilidad de que un alumno apruebe el examen. [**Sol**: 0,8997]
c) el intervalo centrado en la media que contiene al 25% de los alumnos. [**Sol**: (5,844 ; 6,357)]

14º) El tiempo necesario para finalizar un determinado examen sigue una distribución normal de media 1 hora y desviación típica 10 minutos. Calcula:
a) la probabilidad de que una persona termine el examen exactamente en 50 minutos.
b) la probabilidad de que una persona tarde entre 55 y 65 minutos en acabar el examen.
c) el intervalo centrado en la media que contiene al 95% de las personas que consiguen terminar el examen.

15º) Una empresa fabrica diariamente 10.000 cajas de cartón. El peso de estas cajas se distribuye según una distribución normal de media 200 y desviación típica 5 gramos. Se pide calcular en la producción diaria lo siguiente:
a) el número de cajas que pesan más de 215 gramos.
b) el número de cajas que pesan entre 190 y 200 gramos.
c) el intervalo centrado en la media que contiene a la quinta parte de todas las cajas hechas.

16º) Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60% de los hogares tienen al menos dos televisores. Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 20 y 40 de los citados hogares tengan como poco dos televisores?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 30 y 40 hogares tengan al menos dos televisores?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que 25 hogares tengan al menos dos televisores?

Resolución
$A =$ "$Un\ hogar\ tiene, al\ menos, dos\ televisores$" ; $p(A) = 0{,}6 = p$; $n = 50$; $q = 1 - p = 0{,}4$
Defino la variable aleatoria $X =$ "$Número\ de\ hogares\ con, al\ menos, dos\ televisores$".
Se trata de un binomial $X \hookrightarrow B(50;\ 0{,}6)$. Como $n \cdot p \cdot q = 12 > 10$, podemos aproximarla por una normal $X \hookrightarrow N(np, \sqrt{npq}), esto\ es, X \hookrightarrow N(30, \sqrt{12}),\ \ X \hookrightarrow N(30; 3{,}46)$.

a) $p(20 \le X \le 40) = p\left(\frac{20-30}{3{,}46} \le Z \le \frac{40-30}{3{,}46}\right) = p(-2{,}89 \le Z \le 2{,}89) = p(Z \le 2{,}89) - p(Z < -2{,}89) =$
$= p(Z \le 2{,}89) - p(Z > 2{,}89) = \ p(Z \le 2{,}89) - [1 - p(Z \le 2{,}89] = 2 \cdot p(Z \le 2{,}89) - 1 = 2 \cdot 0{,}9981 - 1$
$= 0{,}9962$
b)) $p(30 \le X \le 40) = p\left(\frac{30-30}{3{,}46} \le Z \le \frac{40-30}{3{,}46}\right) = p(0 \le Z \le 2{,}89) = p(Z \le 2{,}89) - p(Z < 0) =$
$= 0{,}9981 - 0{,}5 = 0{,}4981$
c) $p(X = 25) = p(25 - 0{,}5 < X < 25 + 0{,}5) = p\left(\frac{24{,}5-30}{3{,}46} < Z < \frac{25{,}5-30}{3{,}46}\right) = p(-1{,}59 < Z < -1{,}30) =$
$p(Z < -1{,}30) - p(Z < -1{,}59) = 1 - p(Z \le 1{,}30) - 1 + p(Z \le 1{,}49) = -0{,}9032 + 0{,}9319 = 0{,}0287$

17º) Un saco con 400 monedas es vaciado sobre una mesa. Calcula la probabilidad:
a) de que el número de caras esté comprendido entre 180 y 210, ambos inclusive.
b) de que el número de caras esté comprendido entre 190 y 210, ambos inclusive.

18º) En un proceso de fabricación, el porcentaje de piezas defectuosas es del 5%. Si cada día se fabrican 330 piezas, calcula la probabilidad de que el número de piezas defectuosas esté comprendido entre 20 y 30.

19º) Un examen tipo test consta de 200 preguntas del tipo Verdadero-Falso. Una persona aprueba el examen si contesta correctamente más de 110 preguntas. Si respondemos a todas las preguntas al azar, calcula la probabilidad que tenemos de aprobar el examen.

20º) Un jugador de baloncesto tira 5 veces a canasta con un 20% de efectividad. Calcula la probabilidad de que no acierte ninguna vez. Si tira 40 veces y su efectividad se mantuviera, calcula la probabilidad de que acierte 30 veces.

21º) El peso de las ovejas adultas se distribuye normalmente con una media de 53 Kg y una desviación típica de 2,4 Kg.
a) ¿Qué porcentaje de las ovejas pesará entre 50 y 57 Kg? [Sol: 84,69%]
b) Si pretendemos separar una cuarta parte de las ovejas, siendo las más pesadas del rebaño, ¿a partir de qué peso se hará la separación? [Sol: 54,63 Kg]
c) Para un rebaño de 4000 ovejas, las 1000 que menos pesan ¿por debajo de qué peso están?
[Sol: 51,38 Kg]

22º) Se sabe que el 98,61% de los tornillos fabricados por una empresa tiene un diámetro menor que 3,398 mm. Si el diámetro de los tornillos se distribuye según una normal de media 3,2 mm, determina la desviación típica. [Sol: 0,09]

23º) Tras un test de cultura general se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución $N(65, 18)$. Se desea clasificar a los examinados en tres bloques, de baja cultura general, de cultura general aceptable y de excelente cultura general, de modo que haya en el primero un 20% de la población, un 65% en el segundo y un 15% en el tercero. ¿Cuáles deben ser las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro? [Sol: Baja cultura hasta 49,88 puntos; Aceptable de 49,88 a 83,72; Excelente a partir de 83,72]

24º) Un fabricante observa que la demanda diaria de su producto, expresada en unidades, sigue una $N(150{,}25)$

a) Si tiene almacenadas 165 unidades, ¿cuál es la probabilidad de que no pueda atender toda la demanda? [Sol: 26,11%]
b) Si desea que la probabilidad de quedarse algún día sin existencias sea, como máximo, 0´002, ¿cuántas unidades ha de tener almacenadas? [Sol: 222]

25º) Un almacén de camisas ha determinado que el cuello de los varones adultos se distribuye normalmente con media 38 cm y desviación típica 1,5 cm. Con el fin de poder preparar la producción de la próxima temporada, y teniendo en cuenta que su producción está en 10.000 camisas, ¿cuántas camisas de los números 35 tendrán que fabricar?

Resolución

Sea X la variable aleatoria que mide el cuello de los varones adultos. X sigue una normal $N(38; 1{,}5)$.
La $p[X = 35]$ es nula; pero puede considerarse que los hombres que utilizan la talla 35 van a ser aquellos varones cuyas medidas de cuello estén comprendidas entre 34,5 y 35,5.

$$p[34{,}5 < X < 35{,}5] = 0{,}0478 - 0{,}0098 = 0{,}0380 = 3{,}8\%.$$

10000·0,038=380 camisas

26º) Supongamos una distribución normal de media 50 en la que la probabilidad de obtener un valor por encima de 70 es 0,0228. ¿Cuál es la desviación típica? ¿Cuál es la probabilidad de los valores por debajo de 45? [Sol: $\sigma = 10{,}0045; 0{,}3086$]

27º) En una fábrica se elaboran dos tipos de productos, A y B. El 75% de los productos fabricados son de tipo A y el 25% de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5% de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un 2,5% de las veces.
a) Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?
b) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.
EvAU Madrid. Junio 2018. Opción B