A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composición del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78% de nitrógeno, un 21% de oxígeno y un 1% de argón.

a) (0.5 puntos) Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determine cuántos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuántos de argón son necesarios.

b) (2 puntos) Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas A, B y C, cuya composición se expresa en la tabla adjunta. Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composición requerida.

Mezcla	Nitrógeno	Oxígeno	Argón
A	80%	20%	0%
B	70%	20%	10%
C	60%	40%	0%

Resolución

a) $0{,}78 \cdot 2000 = 1560$ litros de nitrógeno ; $0{,}21 \cdot 2000 = 420$ litros de oxígeno ; $0{,}01 \cdot 2000$=20 litros de argón.

b)

$x \equiv$ *número de litros de la mezcla A*

$y \equiv$ *número de litros de la mezcla B*

$z \equiv$ *número de litros de la mezcla C*

El sistema de ecuaciones correspondiente es $\begin{cases} 0{,}8x + 0{,}7y + 0{,}6z = 1560 \\ 0{,}2x + 0{,}2y + 0{,}4z = 420 \\ \qquad 0{,}1y \qquad = 20 \end{cases}$

De la tercera ecuación obtenemos $y = 200$ y, sustituyendo en las dos primeras y multiplicando por 10:

$$\begin{cases} 8x + 6z = 14200 \\ 2x + 4z = 3800 \end{cases}$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones lineales, multiplicando la segunda ecuación por 4:

$$\begin{cases} 8x + 6z \ = 14200 \\ 8x + 16z = 15200 \end{cases}$$

Restando miembro a miembro ambas ecuaciones:

$$10z = 1000 \ \text{ de donde } z = 100 \ \text{ y } \ x = 1700$$

Hay que utilizar 1700 litros de la mezcla A, 200 litros de la mezcla B y 100 litros de la mezcla C.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = e^{3x-2}$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el punto en el que la tangente a la curva $y = f(x)$ tiene pendiente igual a $\frac{3}{e}$ y escribir la ecuación de esta recta tangente.

b) (0.5 puntos) Calcular $\lim_{x \to 2/3} \frac{1 - f(x)}{6x - 4}$.

c) (1 punto) Calcular el área de la superficie acotada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 0$, $y = 1$.

Resolución

a) En el punto $P(c, f(c))$ de la curva en el que la recta tangente tiene pendiente $\frac{3}{e}$ se cumplirá $f'(c) = \frac{3}{e}$

$$f'(x) = 3 \cdot e^{3x-2} \ ; \ f'(c) = \frac{3}{e} \Leftrightarrow 3 \cdot e^{3c-2} = 3 \cdot e^{-1} \Leftrightarrow e^{3c-2} = e^{-1} \Leftrightarrow 3c - 2 = -1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad ; \quad \textit{El punto es } P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{e}\right)$$

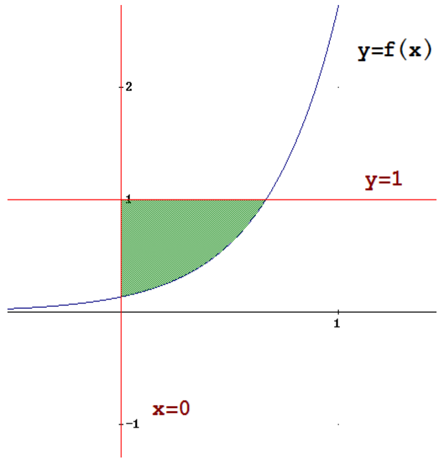
La recta tangente a la curva en P es :

$$t \equiv y - \frac{1}{e} = \frac{3}{e} \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)$$

b)

$$\lim_{x \to 2/3} \frac{1 - f(x)}{6x - 4} = \lim_{x \to 2/3} \frac{1 - e^{3x-2}}{6x - 4} \overset{\frac{0}{0}\, L'Hop}{\cong} \lim_{x \to 2/3} \frac{-3e^{3x-2}}{6} = -\frac{1}{2}$$

c)



Corte de la curva $y = f(x)$ y la recta $y = 1$:

$$e^{3x-2} = 1 = e^0 \overset{f\ inyectiva}{\Leftrightarrow} 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

El área pedida es:

$$\acute{A}rea = \int_0^{2/3} (1 - e^{3x-2})dx = \left[x - \frac{e^{3x-2}}{3}\right]_0^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3e^2}u^2$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r_1 \equiv \left\{ \begin{array}{ll} x = & z - 1 \\ y = & 2 - 3z \end{array} \right.$, $r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{ll} x = & 4 + 5z \\ y = & 4z - 3 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1.5 puntos) Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

b) (1 punto) Hallar el punto de corte entre la recta r_2 y el plano que contiene a r_1 y pasa por el origen de coordenadas.

Resolución

a)

Un punto y vector director de $r_1(A, \vec{u})$ son $A(-1, 2, 0)$ y $\vec{u} = (1, -3, 1)$

Un punto y vector director de $r_2(B, \vec{v})$ son $B(4, -3, 0)$ y $\vec{v} = (5, 4, 1)$

Las rectas se cruzan porque $rg(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 3$ al ser $\begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -55 \neq 0$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 4\vec{j} + 19\vec{k} = (-7, 4, 19)$$

$$d(r_1, r_2) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} = \frac{\left\| \begin{matrix} 5 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{(-7)^2 + 4^2 + 19^2}} = \frac{55}{\sqrt{426}} = \frac{55\sqrt{426}}{426}u$$

b) El plano π que contiene a r_1 y pasa por el punto $O(0, 0, 0)$ tiene las direcciones de los vectores $\vec{u} = (1, -3, 1)$ y $\overrightarrow{OA} = (-1, 2, 0)$:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv 2x + y + z = 0$$

Corte de r_2 con el plano π:

$$\begin{cases} x = 4 + 5z \\ y = 4z - 3 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2(4 + 5z) + 4z - 3 + z = 0 \Leftrightarrow 15z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{3}$$

$$El\ punto\ pedido\ es\ P\left(4 - \frac{5}{3}, -\frac{4}{3} - 3, -\frac{1}{3}\right) \quad ; \quad \text{P}\left(\frac{7}{3}, -\frac{13}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A \cup B) = 0.55$, $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.90$ y $P(B|A) = 0.25$. Se pide:

a) (2 puntos) Calcular $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$ y $P(B|\overline{A})$.

b) (0.5 puntos) Deducir de manera razonada si los sucesos A y B son independientes.

Resolución

a)

$$p(\bar{A} \cup \bar{B}) = p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 0{,}90 \Leftrightarrow p(A \cap B) = 0{,}1$$

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = 0{,}25 \Leftrightarrow p(A) = \frac{p(A \cap B)}{0{,}25} = \frac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}4$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - pA \cap B) \Leftrightarrow 0{,}55 = 0{,}4 + p(B) - 0{,}1 \Leftrightarrow p(B) = 0{,}25$$

$$p(B|\bar{A}) = \frac{p(B \cap \bar{A})}{p(\bar{A})} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{1 - p(A)} = \frac{0{,}25 - 0{,}1}{1 - 0{,}4} = \frac{0{,}15}{0{,}6} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

b) $0{,}1 = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}1.$ A y B son independientes.

B.1. Calificación máxima:: 2.5 puntos.

Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro t.

b) (1.5 puntos) Resolver el sistema $AX = B$, para los valores de t que lo hagan compatible y determinado.

Resolución

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2-5F_1 \\ F_3+F_1}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & -2t \\ 0 & t \end{pmatrix} \underset{\frac{-1}{2}F_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & t \\ 0 & t \end{pmatrix} \underset{F_3-F_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Caso 1 $\forall t \in \mathbb{R}$ $t \neq 0$ $rg(A) = 2$

Caso 2 $t = 0$ $rg(A) = 1$

Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2+t & 3 \\ 5 & 10+3t & 9 \\ -1 & -2 & 3t+3 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2-5F_1 \\ F_3+F_1}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & -2t & -6 \\ 0 & t & 3t+6 \end{pmatrix}$

$\underset{\frac{-1}{2}F_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & t & 3 \\ 0 & t & 3t+6 \end{pmatrix} \underset{F_3-F_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & t & 3 \\ 0 & 0 & 3t+3 \end{pmatrix}$

El sistema es compatible y determinado para $t = -1 \begin{cases} x + y = 3 \\ -y = 3 \end{cases}$ $y = -3$; $x = 6$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 2$.

b) (0.75 puntos) Determinar las posibles asíntotas de la curva $y = f(x)$ y estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) (0.75 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^2 x f(x)\, dx$.

Resolución

a) $f(2) = 1$; $f'(x) = \frac{-3}{(x+1)^2}$; Pendiente de la recta tangent en $x = 2$: $f'(2) = -\frac{1}{3}$

Recta tangente a la curva en $P(2,1)$: $t \equiv y - 1 = -\frac{1}{3}(x-2)$

Cortes con ejes coordenados: $x = 0 \Longrightarrow y = \frac{5}{3}$ $A\left(0, \frac{5}{3}\right)$; $y = 0 \Longrightarrow -1 = -\frac{1}{3}(x-2) \Longrightarrow x = 5$ $B(5,0)$

$$ÁreaTriángulo = \frac{5 \cdot \frac{5}{3}}{2} = \frac{25}{6}\ u^2$$

b) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{3}{x+1} \overset{\frac{3}{0^-}}{=} -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{3}{x+1} \overset{\frac{3}{0^+}}{=} +\infty \end{cases}$ La recta $x = -1$ es A. vertical. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3}{x+1} \overset{\frac{3}{\pm\infty}}{=} 0$ La recta $y = 0$ es A. horizontal

No tiene asíntota oblicua.

Crecimiento y decrecimiento de la función (signo de f'):

$$\frac{-3}{(x+1)^2} < 0\ en\ su\ dominio. La\ función\ decrece\ en\ su\ dominio\ \mathbb{R} - \{-1\}$$

c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{x+1} dx = 3\int_0^2 \frac{x}{x+1} dx = 3\left(\int_0^2 dx \int_0^2 \frac{-1}{x+1} dx = -3\right) = 3[x - \ln|x+1]_0^2 = 3(2 - ln3)$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(1,1,-2)$, $B(3,-1,4)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -2 + 5\lambda, \\ z = 3 \end{cases}$ se pide:

a) (1.5 puntos) Calcular el área del triángulo OPQ, siendo $O(0,0,0)$, P el punto medio del segmento AB y Q la intersección de la recta que pasa por A y B y el plano $\pi \equiv z = 7$.

b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a la recta r.

c) (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman la recta r y la recta que pasa por A y B.

Resolución

a) $P(x,y,z)$ punto medio del segmento $\overline{AB} \Longrightarrow x = \frac{1+3}{2} = 2$; $y = \frac{1-1}{2} = 0$; $z = \frac{-2+4}{2} = 1$

$$P(2,0,1)$$

Recta $s(A,B) = s(A,\vec{u})$ siendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2,-2,6)$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

Intersección de s y $\pi \equiv z = 7$:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 3t \\ z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow -2 + 3t = 7 \Leftrightarrow t = 3. Por\ tanto\ Q(4,-2,7)$$

Área del triángulo de vértices $O(0,0,0), P(2,0,1)\ y\ Q(4,-2,7)$:

$$Área = \frac{|\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OQ}|}{2} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 7 \end{vmatrix} \right\|}{2} = \frac{|2\vec{i} - 10\vec{j} - 4\vec{k}|}{2} = \frac{\sqrt{4 + 100 + 16}}{2} = \frac{\sqrt{120}}{2} = \sqrt{30}\ u^2$$

b) El vector normal del plano π' que buscamos será el director de la recta r: $\overrightarrow{n_{\pi'}} = \vec{v} = (3,5,0)$.

El plano será $\pi' \equiv 3x + 5y + d = 0$

Como $A(1,1,-2) \in \pi'$, se tiene que $3 + 5 + d = 0$, de donde $d = -8$.

$$\pi' \equiv 3x + 5y - 8 = 0$$

c) $\vec{u} = (2,-2,6)$; $\vec{v} = (3,5,0)$

$$\cos(\widehat{r,s}) = |\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{|6-10|}{\sqrt{44}\cdot\sqrt{34}} = \frac{4\sqrt{44}\sqrt{34}}{44\cdot34} = \frac{2\sqrt{374}}{374} \approx 0{,}1034$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En cierta ciudad se estima que la temperatura máxima de cada día, en el mes de junio, sigue una distribución normal de media 30ºC y varianza 25. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un día cualquiera del mes la temperatura máxima esté entre 28ºC y 32ºC.
b) (1 punto) Calcular el número esperado de días del mes con máxima superior a 36ºC.
c) (0.75 puntos) Determinar la temperatura máxima alcanzada el día 10 de junio, sabiendo que dicha temperatura fue superada exactamente el 50% de los días del mes.

Resolución

$X =$ "*Temperatura máxima diaria en junio*"

Media: $\mu = 30$; Varianza=25 ; Desviación típica: $\sigma = \sqrt{25} = 5$

$X \rightsquigarrow N(30,5)$; $Z \rightsquigarrow N(0,1)$

a) $p(28 \leq X \leq 32) =^{Tificamos}= p\left(\frac{28-30}{5} \leq Z \leq \frac{32-30}{5}\right) = p(-0{,}4 \leq Z \leq 0{,}4) = p(Z \leq 0{,}4) - p(Z < -0{,}4) = p(Z \leq 0{,}4) - p(Z > 0{,}4) = p(Z \leq 0{,}4) - [1 - p(Z \leq 0{,}4] = 2p(Z \leq 0{,}4) - 1 = 2 \cdot 0{,}6554 - 1 = 0{,}3108$

b)

$$p(X > 36) =^{Tificamos}= p\left(Z > \frac{36-30}{5}\right) = p(Z > 1{,}2) = 1 - p(Z \leq 1{,}2) = 1 - 0{,}8849 = 0{,}1151$$

$$30 \cdot 0{,}1151 = 3{,}453 \; días$$

Cabe esperar entre 3 y 4 días

c) Obviamente es la media $t = 30°$

$$p(X \geq t) = 0{,}5 \Leftrightarrow p(X < t) = 0{,}5 \Leftrightarrow p\left(Z < \frac{t-30}{5}\right) 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{t-30}{5} = 0 \Leftrightarrow t = 30°$$