1º) Utiliza el teorema de Bolzano y el teorema de Rolle para probar que las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2^{-x}$, definidas para $x > 0$, se cortan en un único punto.

Resolución

$f(x) = x^2$ y $g(x) = 2^{-x}$

$h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 2^{-x}$

Se trata de probar que la función h tiene uno y solo un cero o raíz, que la ecuación $h(x) = 0$ tiene una y solo una solución.

La función h es continua en todo su dominio. Para aplicar el teorema de Bolzano es preciso encontrar un intervalo en que la función cambie de signo:

$h(0) = -1 < 0$

$h(1) = 1 - 2^{-1} = \frac{1}{2} > 0$

Así pues, la función h cumple las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 1]$, y, por tanto, existe al menos un $c \in (0, 1)$ tal que $h(c) = 0$.

Ahora hay que demostrar que la raíz es única.

h es una función derivable en todo su dominio.

$h'(x) = 2x - (-1)\, 2^{-x} \ln 2 = 2x + 2^{-x} \ln 2 > 0$, pues $x > 0$.

Por tanto, la raíz es única, pues si existiera alguna otra c_1 tal que $h(c_1) = 0$, la función h cumpliría con las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo (c, c_1) o en el (c_1, c) , existiendo, por tanto, algún c_2 tal que $h'(c_2) = 0$, lo que contradice el hecho de que $h'(x) > 0$.

2º) Calcula

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx - x}{x - senx}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 4)^{\frac{1}{Lx}}$

Resolución

a)

Es una indeterminación del tipo (0)/(0), que desaparece aplicando dos veces la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \tan^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \tan x (1 + \tan^2 x)}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{2(1 + \tan^2 x)}{\cos x} = \boxed{2}$$

b)

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 4)^{\frac{1}{Lx}} \overset{+\infty^0}{\triangleq}$$

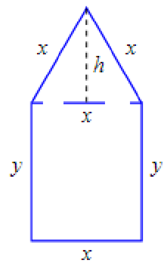
$$L\left(\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 4)^{\frac{1}{Lx}}\right) = \lim_{x \to +\infty} L\left((x^2 + 4)^{\frac{1}{Lx}}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{Lx} \cdot L(x^2 + 4)\right) \overset{0.\infty}{\triangleq} \lim_{x \to +\infty} \frac{L(x^2 + 4)}{Lx} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}, L`Hôp}{\triangleq}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 4} = 2$$

Así, $L\left(\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 4)^{\frac{1}{Lx}}\right) = 2$, de donde $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 4)^{\frac{1}{Lx}} = e^2$

3º) A una ventana rectangular se le abre un triángulo equilátero sobre el lado superior. Si el perímetro de la figura así formada es de 11 metros, determina las dimensiones para que el área de la figura sea máxima.

Resolución



$3x+2y=11\ ;\ y=\frac{11-3x}{2}$

$h=\sqrt{x^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$S=x\,y+\frac{1}{2}x\,h\ ;\ S\,(x)=x\frac{11-3x}{2}+\frac{1}{2}x\,\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{1}{4}\left(22x-6x^2+\sqrt{3}x^2\right)$

$S\,(x)=\frac{1}{4}\left(22x-\left(6-\sqrt{3}\right)x^2\right)$

$S'(x)=\frac{1}{4}\left(22-2\left(6-\sqrt{3}\right)x\right)$

$S'(x)=0\Rightarrow x=\frac{11}{6-\sqrt{3}}=\frac{66+11\sqrt{3}}{33}=\boxed{\frac{6+\sqrt{3}}{3}\text{ m}\approx 2{,}577\text{ m}}$

$y=\frac{11-3\frac{6+\sqrt{3}}{3}}{2}=\boxed{\frac{5-\sqrt{3}}{2}\text{ m}\approx 1{,}634\text{ m}}$

$S''\,(x)=\frac{\sqrt{3}-6}{2}<0\Rightarrow$ Los valores obtenidos corresponden a un máximo.

4º) Calcula la recta tangente a la curva $f(x)=2x^3-6x^2+4$ en su punto de inflexión.

Resolución

$y=2x^3-6x^2+4$

$y'=6x^2-12x$

$y''=12x-12$

$y''=0\ \Rightarrow\ x=1$ [abscisa del punto de inflexión]

$y\,(1)=0$

$y'\,(1)=-6$

$y-y\,(1)=y'\,(1)\ \ (x-1)$

$y=-6\ (x-1)\ \ ;\ \boxed{y=-6x+6}$

5º) Considera la función $f(x)=\frac{2}{x^2-4x}$

a) Calcula dominio, asíntotas y monotonía de la función.

b) Dibuja la función.

c) Calcula la integral $\int\frac{2}{x^2-4x}\,dx$

Resolución

a) El denominador se anula en $x=0$ y en $x=4$. $\boxed{\text{Dominio }=R-\{0,4\}}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-}f\,(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{2}{x(x-4)}=+\infty\quad\left[\frac{2}{(0^-)(-4)}\right]\\ \lim\limits_{x\to0^+}f\,(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2}{x(x-4)}=-\infty\quad\left[\frac{2}{(0^+)(-4)}\right]\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{x=0\text{ es asíntota vertical}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to4^-}f\,(x)=\lim\limits_{x\to4^-}\frac{2}{x(x-4)}=-\infty\quad\left[\frac{2}{(4)(0^-)}\right]\\ \lim\limits_{x\to4^+}f\,(x)=\lim\limits_{x\to4^+}\frac{2}{x(x-4)}=+\infty\quad\left[\frac{2}{(4)(0^+)}\right]\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{x=4\text{ es asíntota vertical}}$$

$$\lim\limits_{x\to\infty}f\,(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2-4x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2-4x}=0\Rightarrow\boxed{y=0\text{ es asíntota horizontal}}$$

$f'(x) = \frac{-4(x-2)}{(x^2-4x)^2}$

signo de f' y crecimiento

$(-\infty, 0)$; $f'(x) > 0$; f creciente

$(0, 2)$; $f'(x) > 0$; f creciente

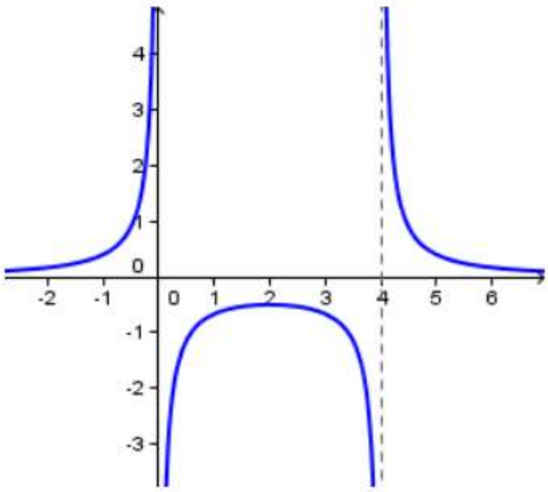
$(2, 4)$; $f'(x) < 0$; f decreciente

$(4, +\infty)$; $f'(x) < 0$; f decreciente

En conclusión

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ es creciente en } (-\infty, 0) \cup (0, 2) \\ f \text{ es decreciente en } (2, 4) \cup (4, +\infty) \end{array}}$$

En $(2, -1/2)$ hay un máximo relativo.



b)

c)

Descomposición en fracciones de f

$\frac{2}{x(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4)+Bx}{x(x-4)}$ de donde:

$2 = A(x-4) + Bx$

para $x = 0$: $2 = A(-4)$; $A = -\frac{1}{2}$

para $x = 4$: $2 = B4$; $B = \frac{1}{2}$

$$\int f(x)\, dx = \int \frac{2}{x(x-4)}\, dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} \right) dx = \int \left(\frac{-1/2}{x} + \frac{1/2}{x-4} \right) dx =$$

$$= \boxed{-\tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln|x-4| + K = \ln\sqrt{\left|\tfrac{x-4}{x}\right|} + K}$$

6º) Halla una primitiva de la función $f(x) = (x-1)\cdot e^x$, que tenga un extremo en el eje OX.

Resolución

$f'(x) = (x-1)\, e^x$

$$f(x) = \int (x-1)\, e^x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x-1 & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array} \right\} = (x-1)\, e^x - \int e^x dx = (x-1)\, e^x - e^x + k$$

$f(x) = (x-2)\, e^x + k$

Extremos relativos de f : $f'(x) = 0$; $(x-1)\, e^x = 0$; $x = 1$

Además, se encuentra en el eje OX, por lo que $f(1) = 0$

Lo que permite calcular la constante k :

$f(1) = (1-2)\, e^1 + k = -e + k = 0$; $k = e$

$\boxed{f(x) = (x-2)\, e^x + e}$

7º) Halla el área limitada por la curva $y = (x^2 + x - 2)(x - 3)$ y el eje OX.

Resolución

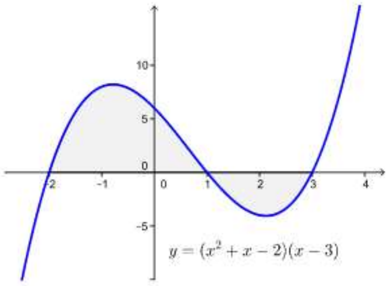
$$\left(x^2+x-2\right)\ (x-3) = (x+2)\ (x-1)\ (x-3)$$

$$\left(x^2+x-2\right)\ (x-3) = x^3-2x^2-5x+6$$

$$\text{área} = \left|\int_{-2}^{1}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx\right| + \left|\int_{1}^{3}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx\right| =$$

$$= \left|\left[\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{2}{3}x^3-\tfrac{5}{2}x^2+6x\right]_{-2}^{1}\right| + \left|\left[\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{2}{3}x^3-\tfrac{5}{2}x^2+6x\right]_{1}^{3}\right| =$$

$$= \left|\tfrac{37}{12}-\left(-\tfrac{38}{3}\right)\right| + \left|\left(-\tfrac{9}{4}\right)-\tfrac{37}{12}\right| = \tfrac{189}{12}+\tfrac{64}{12} = \boxed{\tfrac{253}{12}\approx 21{,}083\ \mathrm{u}^2}$$



Puntuación

1, 2, 3, 5, 7 -------------- 1,5 puntos

4, 6 ------------------------------ 1,25 "