UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO
Curso **2014-2015**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
Calificación: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos; las preguntas 3ª y 4ª sobre 2 puntos.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1 . Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la función
$$f(x) = \frac{x}{x^2-4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1},$$
donde ln denota el logaritmo neperiano, se pide:

a) ($1'5$ puntos) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.
b) ($0'75$ puntos) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.
c) ($0'75$ puntos) Calcular $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

Ejercicio 2 . Calificación máxima: 3 puntos.

a) (2 puntos) Discutir, según los valores de m, el sistema de ecuaciones siguiente:
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & 3y & + & (m-1)z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & mz & = & 1 \\ 5x & + & my & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$
b) (1 punto) Resolver el sistema anterior para el caso $m = 1$.

Ejercicio 3 . Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Dados los vectores $\vec{u} = (2,3,4)$, $\vec{v} = (-1,-1,-1)$ y $\vec{w} = (-1,\lambda,-5)$, encontrar los valores de λ que hacen que el paralelepípedo P generado por $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 6.
b) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano $z = 0$, con dirección perpendicular a $\vec{u} = (2,-1,4)$ y que pasa por el punto $(1,1,0)$.

Ejercicio 4 . Calificación máxima: 2 puntos.
Dados el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$ y la superficie esférica $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$, hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dados el punto $P(-4,6,6)$, el origen de coordenadas O, y la recta $r \equiv \begin{cases} x = -4+4\lambda \\ y = 8+3\lambda \\ z = -2\lambda, \end{cases}$ se pide:

a) (1 punto) Determinar un punto Q de la recta r, de modo que su proyección Q' sobre $\overline{OP}$ sea el punto medio de este segmento.

b) (1 punto) Determinar la distancia de P a r.

c) (1 punto) ¿Existe algún punto R de la recta r, de modo que los puntos O, P y R estén alineados? En caso afirmativo, encontrar el punto (o los puntos) con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x < 0\,, \\ xe^x + 1\,, & \text{si } x \geq 0\,, \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad de f.

b) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular A^{15} y A^{20}.

b) (1 punto) Resolver la ecuación matricial $6X = B - 3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) ($1'25$ puntos) Hallar el rango de A en función de t.

b) ($0'75$ puntos) Calcular t para que $\det(A - tI) = 0$.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

Ejercicio 1.
a) Dominio: $0'5$ puntos. Asíntotas verticales: $0'5$ puntos (repartidos en resultado: $0'25$, justificación: $0'25$). Asíntota horizontal: $0'5$ puntos (repartidos en resultado: $0'25$, justificación: $0'25$). Si ponen que $x = -2$ es asíntota vertical se restarán $0'25$ puntos.
b) Calcular $f'(x)$: $0'25$. Ecuación de la recta tangente: $0'5$ puntos (repartidos en procedimiento: $0'25$, cálculos: $0'25$).
c) Aplicar la linealidad de la integral: $0'25$ puntos. Hacer correctamente la integral de cada sumando $0'25$ puntos. (No penalizar si olvidan el valor absoluto en el argumento del logaritmo al dar el resultado de la integral.)

Ejercicio 2.
a) Por la obtención de los valores críticos $[m = 1, 7]$: $0'5$ puntos (repartidos en planteamiento: $0'25$, resolución: $0'25$). Por la discusión de cada uno de los tres casos $[m = 1]$, $[m = 7]$, $[m \neq 1, m \neq 7]$: $0'5$ puntos (repartidos en resultado: $0'25$ puntos, justificación: $0'25$).
b) Procedimiento: $0'5$ puntos. Cálculos: $0'5$ puntos.

Ejercicio 3.
a) Planteamiento: $0'5$ puntos. Resolución: $0'5$ puntos.
b) Planteamiento: $0'5$ puntos. Resolución: $0'5$ puntos.

Ejercicio 4.
Planteamiento: 1 punto. Resolución: 1 punto.
Si sólo obtiene uno de los planos (correctamente) se calificará con $1'5$ puntos.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.
a) Planteamiento: $0'5$ puntos. Resolución: $0'5$ puntos.
b) Planteamiento: $0'5$ puntos. Resolución: $0'5$ puntos.
c) Planteamiento: $0'5$ puntos. Resolución: $0'5$ puntos.

Ejercicio 2.
a) Justificar que f es continua en $x \neq 0$: $0'25$ puntos. Saber cómo estudiar continuidad en $x = 0$: $0'25$ puntos. Cada límite lateral en $x = 0$: $0'25$ puntos.
b) Derivada en $x > 0$: $0'25$ puntos. Derivada en $x < 0$: $0'25$. Demostrar que f no es derivable en $x = 0$: $0'5$ puntos (repartidos en planteamiento: $0'25$, resolución: $0'25$).
c) Por plantear cuál es la integral que hay que calcular: $0'25$ puntos. Cálculo de la primitiva: $0'5$ puntos. Aplicación de la regla de Barrow: $0'25$ puntos.

Ejercicio 3.
a) Por cada una de las dos matrices: $0'5$ puntos (repartidos en resultado: $0'25$ y justificación: $0'25$).
b) Despejar X: $0'5$ puntos. Cálculos matriciales para determinar X: $0'5$ puntos.

Ejercicio 4.
a) Por la obtención de los valores críticos $[t = 7, 2]$: $0'5$ puntos (repartidos en planteamiento: $0'25$, resolución: $0'25$). Por determinar el rango en cada uno de los tres casos $[t = 7]$,$[t = 2]$, $[t \neq 7, t \neq 2]$: $0'25$ puntos.
b) Calcular el determinante: $0'5$ puntos (repartidos en procedimiento: $0'25$, cálculos $0'25$). Obtener el valor de t: $0'25$ puntos.