

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (2,5 puntos) Sea m un número real y considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determine todos los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.

b) (1 punto) Determine, si existe, la inversa de A cuando $m = 0$.

c) (0,5 puntos) Determine, si existe, la inversa de A^2 cuando $m = 0$.

2. (2,5 puntos) Dados el punto $P \equiv (1, -1, 0)$, y la recta:

$$s : \begin{cases} -2x & + z - 1 = 0 \\ 3x - y & - 3 = 0 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Determine la ecuación general del plano ($Ax + By + Cz + D = 0$) que contiene al punto P y a la recta s .

b) (1 punto) Determine el ángulo que forman el plano $\pi : 2x + y - z + 1 = 0$ y la recta s .

3. (2,5 puntos) Considere la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2}$$

a) (1,5 puntos) Determine las asíntotas, horizontales, verticales y oblicuas, que tenga la función $f(x)$.

b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. ¿Tiene la función $f(x)$ algún máximo o mínimo relativo?

4. (2,5 puntos)

a) (1,25 puntos) Usando el cambio de variable $t = \ln(x)$, determine el valor de la integral:

$$\int \frac{1 + 3 \ln(x) + (\ln(x))^3}{x(1 - (\ln(x))^2)} dx$$

b) (1,25 puntos) Determine el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x)) \left(\frac{1}{\sin(x)} \right)^2$$

OPCIÓN B

1. (2,5 puntos) Considere las matrices de orden 2×2 siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 puntos) Determine dos matrices M y N de orden 2×2 tales que:

$$\begin{cases} AM + BN = D \\ AM = N \end{cases}$$

b) (1 punto) Se considera una matriz G de orden 3×3 , cuyas columnas se representan por C_1, C_2, C_3 y cuyo determinante vale 2. Considere ahora la matriz H cuyas columnas son $C_3, C_3 + C_2, 3C_1$, ¿cuál es el determinante de esta nueva matriz H ?

2. (2,5 puntos) Considere las rectas:

$$r : \begin{cases} 2x - 4z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad s : \frac{x}{2} = \frac{y+2}{a} = \frac{z-(1/2)}{1}$$

a) (2 puntos) Determine la posición relativa de dichas rectas, según los diferentes valores de a .

b) (0,5 puntos) Si $a = 2$, determine el ángulo que forman las rectas r y s .

3. (2,5 puntos)

a) (1,5 puntos) Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$g(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

b) (1 punto) Determine:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 + 2x + 2} - \sqrt{3x^2 + x}$$

4. (2,5 puntos)

a) (1,25 puntos) Determine la integral:

$$\int x^2 \operatorname{sen}(2x) dx$$

b) (1,25 puntos) Determine el área máxima que puede tener un rectángulo cuya diagonal mide 8 metros. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área máxima?

Como norma general, se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

OPCIÓN A

A. 1. (2,5 puntos)

- a) (1 punto) Determinación de todos los valores m : 1 punto.
- b) (1 punto) La determinación de la matriz inversa puede hacerse por cualquier método. Si se realiza por el método de Gauss-Jordan, el proceso es más largo que si se calcula mediante determinantes y los errores numéricos pueden ser más habituales. En ese caso deberá valorarse más el proceso que los cálculos, siempre que éstos tengan sentido.
- c) (0,5 puntos) Se considera válido cualquier método para determinar la inversa.

A. 2. (2,5 puntos)

- a) (1,5 puntos) Si no se proporciona la ecuación general del plano sino que se da en forma vectorial o paramétrica, la calificación máxima será de 0,75 puntos.
- b) (1 punto) Se considera igual de correcto proporcionar el ángulo o alguna de sus razones trigonométricas.

A. 3. (2,5 puntos)

- a) (1,5 puntos) La calificación debe tener en cuenta que se analice la existencia de los tres tipos de asíntotas, aunque sea para razonar que no existen.
- b) (1 punto) Determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento: 0,5 puntos.
Determinación de máximos y mínimos relativos: 0, 5 puntos.

A. 4. (2,5 puntos)

- a) (1,25 puntos) Los pasos para el cálculo de la integral deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta. Si sólo se realiza el cambio de variable pero no se calcula la integral, la puntuación máxima será de 0,5 puntos. Si no se escribe la constante de integración, la calificación máxima será de 1 punto.
- b) (1,25 puntos) Los pasos para el cálculo del límite deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta. Si se realiza un mismo proceso varias veces no debe exigirse una reiteración de los argumentos o explicaciones todas las veces.

OPCIÓN B

B. 1. (2,5 puntos)

- a)** (1,5 puntos) Los cálculos son muy sencillos como para que no haya dificultad en determinar las matrices buscadas. No se exige una comprobación final, pero si se hace puede ser valorada.
- b)** (1 punto) La calificación debe tener en cuenta los razonamientos empleados para responder la cuestión.

B. 2. (2,5 puntos)

- a)** (2 puntos) Debe precisarse la posición relativa de las rectas para obtener la calificación máxima.
- b)** (0,5 puntos) Se considera igualmente correcto proporcionar el ángulo o alguna de sus razones trigonométricas.

B. 3. (2,5 puntos)

- a)** (1,5 puntos) Estudio de máximos y mínimos relativos: 0,75 puntos. Estudio de puntos de inflexión: 0,75 puntos.
- b)** (1 punto) Los pasos para la determinación del límite deben estar claros y la calificación deberá tenerlos en cuenta.

B. 4. (2,5 puntos)

- a)** (1,25 puntos) Los pasos para el cálculo de la integral deben estar claros y la calificación deberá tenerlos en cuenta. Si se realiza un mismo proceso varias veces no debe exigirse una reiteración de los argumentos o explicaciones todas las veces. Si no se escribe la constante de integración la calificación máxima será de 1 punto.
- b)** (1,25 puntos) Los pasos para la determinación del rectángulo deben estar claros y la calificación deberá tenerlos en cuenta.