MATEMÁTICAS II

ELIJA CUATRO DE LOS SEIS BLOQUES PROPUESTOS.

Bloque 1. Dado el número real a, se considera el sistema $\left.\begin{array}{rcl} x-ay+z & = & a \\ ax-y+z & = & 1 \\ -ax-y+z & = & a \end{array}\right\}$.

a) Discuta el sistema según los valores de a. (1.5 puntos)
b) Resuelva el sistema para el caso $a=2$. (1 punto)

Bloque 2. Sea consideran las matrices $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2-a & 1 & a \\ 3 & 3 & a \end{pmatrix}$ y $Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Según los valores de $a \in \mathbb{R}$, estudie el rango de P. (1 punto)
b) Para el caso $a=1$, halle X tal que $P \cdot X = Q$. (1.5 puntos)

Bloque 3. Se denota por r la recta $x-6=y-7=\dfrac{z-4}{-2}$ y por P el punto de coordenadas $(1,0,1)$.

a) Halle la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r. (1 punto)
b) Halle el punto de r más próximo a P y halle la distancia de P a r. (1.5 puntos)

Bloque 4. Se desea construir un prisma recto de base cuadrada cuya área total sea 96 m^2. Determine las dimensiones del lado de la base y de la altura para que el volumen sea máximo. (2.5 puntos)

Bloque 5. Esboce la gráfica de la parábola $y=-x^2+x+\dfrac{7}{4}$ y halle el área de la región del plano determinada por la parábola y la recta que pasa por los puntos $(0,\dfrac{1}{4})$ y $(\dfrac{1}{6},0)$. (2.5 puntos)

Bloque 6. Sea $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-3}$.

a) Determine el dominio de definición, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos, mínimos y puntos de inflexión. (1.25 puntos).
b) Halle las asíntotas y represente aproximadamente la gráfica de la función. (1.25 puntos).

Bloque 1. Dado el número real a, se considera el sistema $\left.\begin{array}{rcl} x - ay + z & = & a \\ ax - y + z & = & 1 \\ -ax - y + z & = & a \end{array}\right\}$.

a) Discuta el sistema según los valores de a. (1.5 puntos)
b) Resuelva el sistema para el caso $a = 2$. (1 punto)

Solución.
a) Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad Am = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 & a \\ a & -1 & 1 & 1 \\ -a & -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

El deteminante de A es $-2a(1-a)$.

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, el sistema es compatible determinado.
- Si $a = 0$, incompatible
- Si $a = 1$, compatible indeterminado

b) Para $a = 2$ sale $x = -1/4$, $y = -3/4$, $z = 3/4$.

Bloque 2. Sea consideran las matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2-a & 1 & a \\ 3 & 3 & a \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Según los valores de $a \in \mathbb{R}$, estudie el rango de P. (1 punto)

b) Para el caso $a = 1$, halle X tal que $P \cdot X = Q$. (1.5 puntos)

Solución.

a) El determinante de P es $-8a + 9 + a^2$ que se anula si $a = 4 \pm \sqrt{7}$.

Para esos valores, el rango es 2. En otro caso, es 3.

b) Para $a = 1$ existe P^{-1}. Entonces $X = P^{-1} \cdot Q$.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & -9/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \cdot Q = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -7 \\ 5/2 & -15/2 & 17/2 \\ -1/2 & 5/2 & -5/2 \end{pmatrix}$$

Bloque 3. Se denota por r la recta $x-6=y-7=\dfrac{z-4}{-2}$ y por P el punto de coordenadas $(1,0,1)$.
a) Halle la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r. (1 punto)
b) Halle el punto de r más próximo a P y halle la distancia de P a r. (1.5 puntos)

Solución.
a)
El vector director de la recta r, $(1,1,-2)$ es perpendicular al plano. Luego el plano es de la forma

$$x+y-2z+d=0$$

Imponiendo que pase por el punto $(1,0,1)$ y se obtiene $d=1$. El plano es

$$x+y-2z+1=0$$

b) Buscamos un punto Q sobre la recta tal que la recta que pasa por P y Q sea perpendicular a r. Entonces, la distancia de P a la recta coincidirá con la distancia de P a Q.
Hallamos Q como intersección de r y el plano del apartado anterior,

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y-2z+1 & = & 0 \\ x-6 & = & y-7 \\ x-6 & = & \dfrac{z-4}{-2} \end{array}\right\}$$

Se obtiene que las coordenadas de Q son $(5,6,6)$.
La distancia es $\sqrt{77}=8{,}775$.

Bloque 4. Se desea construir un prisma recto de base cuadrada cuya área sea 96 m^2. Determine las dimensiones del lado de la base y de la altura para que el volumen sea máximo. (2.5 puntos)

Solución.
Sea x la medida del lado de la base e y la medida de la altura. El área total es $2x^2 + 4xy$. Igualando a 96 y despejando y se obtiene

$$y = \frac{24}{x} - \frac{x}{2}$$

El volumen es x^2y. Sustituyendo y resulta

$$f(x) = 24x - \frac{x^3}{2}$$

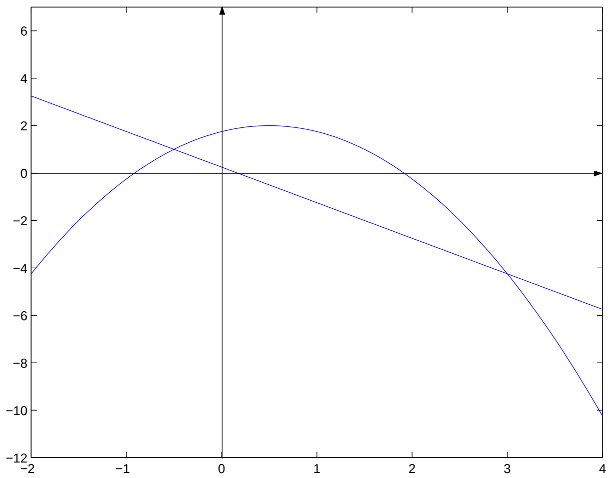
La derivada es

$$f'(x) = 24 - \frac{3x^2}{2}$$

Igualando a 0 se obtiene $x = 4$ (Se descarta la solución negativa).
Se tiene que $f''(4) = -12 < 0$ por lo que es un máximo.

Bloque 5. Esboce la gráfica de la parábola $y = -x^2 + x + \frac{7}{4}$ y halle el área de la región del plano determinada por la parábola y la recta que pasa por los puntos $(0, \frac{1}{4})$ y $(\frac{1}{6}, 0)$. (2.5 puntos)

Solución.
Ecuación de la recta: $y = -\frac{3x}{2} + \frac{1}{4}$
La parábola puede escribirse como $y = -(x - \frac{1}{2})^2 + 2$



Corte de la parábola y la recta: $(-1/2, 3)$ y $(3, -17/4)$.

$$A = \int_{-1/2}^{3} ((-x^2 + x + \frac{7}{4}) - (-\frac{3x}{2} + \frac{1}{4}))\, dx = \int_{-1/2}^{3} (-x^2 + \frac{5x}{2} + \frac{3}{2})\, dx = (-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{4} + \frac{3x}{2})\Big|_{-1/2}^{3} = \frac{343}{48}$$

Bloque 6. Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$.

a) Determine el dominio de definición, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos, mínimos y puntos de inflexión. (1.25 puntos).

b) Halle las asíntotas y represente aproximadamente la gráfica de la función. (1.25 puntos).

Solución.

a)

- Dominio. La función está definida para cualquier valor de x excepto para $x = 3$ donde el denominador se anula.
- Extremos. En el dominio de definición, la derivada es

  $$f'(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)^2}$$

  que se anula en $x = 2$ y $x = 4$.
- Crecimiento. Para los puntos del dominio de definición:
  - En $(-\infty, 2)$ f' es positiva, f creciente.
  - En $(2, 3)$ f' es negativa, f decreciente.
  - En $(3, 4)$ f' es negativa, f decreciente.
  - En $(4, \infty)$ f' es positiva, f creciente.

  Hay un máximo en $x = 2$ y un mínimo en $x = 4$.
- La derivada segunda es

  $$f''(x) = \frac{2}{(x-3)^3}$$

  que no se anula. No hay puntos de inflexión.

b)

- Asíntotas verticales: $x = 3$.
- Asíntotas oblicuas: $y = x - 2$.